Thème : Fonctions
Etude du comportement local

1. L'exercice proposé au candidat

On considère la fonction f définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-\cos x}$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ du plan.
Le but de l'exercice est de déterminer le nombre de tangentes à $\mathcal{C}_f$ passant par l'origine O du repère.

1) a) Déterminer l'équation de la tangente T_a à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a de $[0, \pi]$.

   b) Montrer que T_a passe par O si et seulement si $a \sin a = 1$.

2) Soit la fonction ψ définie sur $]0, \pi]$ par $\psi(x) = \sin x - \dfrac{1}{x}$.

   a) Étudier les variations de ψ' sur $]0, \pi]$.

   b) En déduire que la fonction ψ admet un maximum absolu M qu'elle atteint en un unique x_0 de l'intervalle $]0, \pi]$.

   c) Calculer $\psi'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ et en déduire la position de $\dfrac{\pi}{2}$ par rapport à x_0.

   d) Calculer $\psi\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ et en déduire le signe de M.

3) À l'aide des questions précédentes, déterminer le nombre de tangentes à $\mathcal{C}_f$ qui passent par O.

2. Le travail demandé au candidat

> En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
> Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

$Q.1$) Dégager les outils et les méthodes nécessaires à la résolution de cet exercice.

$Q.2$) A l'aide de votre calculatrice, donner une valeur approchée des coordonnées des points où la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ passe par O. Tracer $\mathcal{C}_f$ et les tangentes en question.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

– Sa réponse à la question $Q.1$).
– Un ou deux énoncés d'exercices se rapportant au thème « **Fonctions** ».

3. Quelques références aux programmes

Classe de Première S

Contenus	Modalités de mise en oeuvre	Commentaires
Dérivation		
Approche cinématique ou graphique du concept de nombre dérivé d'une fonction en un point.	Plusieurs démarches sont possibles : passage de la vitesse moyenne à la vitesse instantanée pour des mouvements rectilignes suivant des lois horaires élémentaires (trinôme du second degré dans un premier temps) ; zooms successifs sur une représentation graphique obtenue à l'écran de la calculatrice.	On ne donnera pas de définition formelle de la notion de limite. Le vocabulaire et la notation relatifs aux limites seront introduits sur des exemples puis utilisés de façon intuitive.
Nombre dérivé d'une fonction en un point : définition comme limite de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand h tend vers 0. Fonction dérivée.		Dans les cas usuels, la limite de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ s'obtient,après transformation d'écriture, en invoquant des arguments très proches de l'intuition. On ne soulèvera aucune difficulté à leur propos et on admettra tous les résultats utiles.
Tangente à la courbe représentative d'une fonction f dérivable ; approximation affine associée de la fonction.	On construira point par point un ou deux exemples d'approximation de courbe intégrale définie par : $y' = f(t)$ et $y(t_0) = y_0$ en utilisant l'approximation $\Delta f \approx f'(a)\Delta t$.	
Dérivée des fonctions usuelles : $\mapsto x^n$, $x \mapsto \sqrt{x}$,$x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$. Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient et de $x \mapsto f(ax+b)$.	On justifiera le résultat donnant la dérivée de uv et $1/u$.	On pourra admettre les dérivées des fonctions sinus et cosinus.
Lien entre signe de la dérivée et variations.	On étudiera, sur quelques exemples, le sens de variation de fonctions polynômes de degré 2 ou 3, de fonctions homographiques ou de fonctions rationnelles très simples. On introduira les notions et le vocabulaire usuels (extremum, majorant, minorant) et, de l'étude du sens de variations, on déduira des encadrements d'une fonction sur un intervalle.	On justifiera que la dérivée d'une fonction monotone sur un intervalle est de signe constant ; on admettra la réciproque. L'étude de fonctions ne sera pas présentée comme une fin en soi, mais interviendra lors de la résolution de problèmes.

Classe de Terminale S

Les élèves à qui ce programme est destiné ont grandi dans un environnement technologique, qui façonne leur comportement et leurs valeurs et crée des centres d'intérêt profondément nouveaux. La puissance d'investigation des outils informatiques et l'existence de calculatrices performantes dont la plupart des élèves disposent sont des progrès bienvenus, et leur impact sur la pédagogie des mathématiques est considérable. Il faut accompagner cette évolution, notamment en utilisant ces outils dans les phases de découverte et d'observation par les élèves.