

**Thème : Divers types de raisonnements  
(par l'absurde, par récurrence...).**

**1. L'exercice proposé au candidat**

Étant donné un entier naturel  $n \geq 2$ , on se propose d'étudier l'existence de trois entiers naturels  $x, y$  et  $z$  tels que  $x^2 + y^2 + z^2 \equiv -1 \pmod{2^n}$ .

- 1) Cas où  $n = 2$  : Montrer que 1, 3 et 5 sont solutions du problème.
- 2) On suppose dorénavant que  $n$  est un entier naturel supérieur ou égal à 3. Supposons qu'il existe trois entiers naturels  $x, y$  et  $z$  tels que  $x^2 + y^2 + z^2 \equiv -1 \pmod{2^n}$ .
  - a) Montrer que les entiers  $x, y$  et  $z$  sont tous impairs ou que deux d'entre eux sont pairs.
  - b) On suppose que  $x$  et  $y$  sont pairs et que  $z$  est impair. Montrer qu'on a alors  $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 1 \pmod{4}$  et en déduire une contradiction.
  - c) On suppose que  $x, y$  et  $z$  sont impairs. Montrer qu'on a  $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 3 \pmod{8}$  et conclure.

**2. Le travail demandé au candidat**

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

**Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :**

- Q.1) Énoncer les théorèmes et les outils mis en jeu dans l'exercice.
- Q.2) Présenter une correction détaillée de la question 2)c) telle que le candidat la proposerait à des élèves de Terminale S.

***Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :***

- ◇ Sa réponse à la question Q.2).
- ◇ Un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Divers types de raisonnements (par l'absurde, par récurrence...)** ».

### 3. Quelques références aux programmes

#### Classe de Première et de Terminale S

##### Généralités à propos d'une formation scientifique en Première et en Terminale S.

[...] La démonstration est constitutive de l'activité mathématique et les élèves doivent en prendre conscience. Faire en sorte que les élèves puissent concevoir des démonstrations dans leur globalité, puis en détailler les différentes étapes, a toujours été et reste un objectif essentiel de tout enseignement des mathématiques en France. Le monde mathématique de chaque élève s'élabore en grande partie à travers une pratique permanente de calculs, d'argumentations, de petits raisonnements et de démonstrations.

Le niveau de rigueur exigible pour une démonstration dépend de l'expérience de l'élève dans le domaine où cette démonstration se situe : ainsi, pour la géométrie, pratiquée depuis l'école primaire, on peut prétendre exiger dès la classe de seconde un niveau de démonstration académique ; en analyse, par contre, la plupart des objets manipulés ne sont pas définis formellement à ce niveau d'études, et les élèves ne peuvent pas aboutir à des démonstrations parfaitement achevées : la nature et le niveau des rédactions exigibles ne peuvent pas être les mêmes. Il conviendra donc, à ce niveau d'étude, en particulier en analyse, d'accepter des argumentations conçues et exposées à l'aide de schémas (même si les élèves ne peuvent pas à ce stade les traduire en un texte linéaire). On gardera néanmoins l'état d'esprit déjà évoqué dans les programmes de collège et de seconde : repérer clairement le statut des divers énoncés en jeu (définition, axiome, théorème démontré, théorème admis,...).

La déduction usuelle (par implication ou équivalence) et la manipulation du contre-exemple ont été travaillées en seconde ; des problèmes bien choisis permettront d'aborder en première le raisonnement par contraposition, par l'absurde ou par disjonction des cas ; le raisonnement par récurrence relève de la classe de terminale.

La démonstration doit garder un caractère vivant et personnel et il convient d'éviter qu'elle n'apparaisse comme une activité relevant d'un protocole trop rigide. Chaque année, les assertions qui doivent être justifiées dans le cadre d'une pratique de la démonstration changent : il est difficile pour les élèves de cerner, parmi les éléments qui devaient être justifiés les années précédentes, ceux qui deviennent des évidences, pour lesquelles une justification ne ferait qu'alourdir la démonstration (ainsi, en première, on peut mettre dans le bagage des évidences que la fonction  $x \mapsto x^2 + 1$  est à valeurs positives).

C'est à l'enseignant de guider au coup par coup cette évolution délicate. Apprendre à rédiger une démonstration constitue un élément important d'une formation scientifique. La rédaction est l'occasion de revenir sur un raisonnement, de le remodeler, de le rendre plus rigoureux et esthétique, de chercher les meilleures notations, de dégager les idées essentielles de l'aspect technique ; c'est ainsi que pour l'élève, des connaissances éparses se fondent en un ensemble cohérent de savoirs, et que se développent des compétences mathématiques fines. Enfin, apprendre à rédiger, c'est aussi acquérir la maîtrise d'une forme particulière d'écriture, mêlant langue usuelle, signes et symboles spécifiques. [...]

#### Classe de Terminale S

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
<b>Suites et récurrence</b> Raisonnement par récurrence. Suite monotone, majorée, minorée, bornée.	On choisira des exemples permettant d'introduire le vocabulaire usuel des suites et nécessitant l'utilisation de raisonnements par récurrence. On s'appuiera sur un traitement tant numérique (avec outils de calcul : calculatrice ou ordinateur) que graphique ou algébrique.	On présentera le principe de récurrence comme un axiome.