

**Thème : Arithmétique****L'exercice****L'âge du capitaine**

Le capitaine a fait naufrage. Tout ce que l'on a retrouvé sur lui est sa carte de sécurité sociale. On parvient à déchiffrer son numéro INSEE, sauf le deuxième chiffre  $a$  et le troisième chiffre  $b$  qui sont illisibles :  $1ab1271153044$  clé 67

Les deux chiffres  $a$  et  $b$  qui manquent sont, dans cet ordre, les deux derniers chiffres de l'année de naissance du capitaine. On se propose d'utiliser la clé du numéro INSEE pour retrouver cette année de naissance.

1) La clé  $K$  d'un numéro INSEE est calculée de la manière suivante :  $K = 97 - R$  où  $R$  est le reste de la division euclidienne par 97 de l'entier  $N$  constitué par les 13 premiers chiffres du numéro INSEE.

1.a) Démontrer que la clé  $K$  d'un numéro INSEE est telle que  $N + K \equiv 0 \pmod{97}$ .

1.b) Déduire que, pour le numéro INSEE du capitaine, on a :  $N \equiv 30 \pmod{97}$ .

2) On écrit  $1ab1271153044 = 1ab \times 10^{10} + A$ , où  $A = 1271153044$ .

2.a) Calculer le reste de la division euclidienne de  $A$  par 97.

2.b) Justifier la congruence suivante :  $10^2 \equiv 3 \pmod{97}$ .

2.c) En déduire que l'on a :  $10^{10} \equiv 49 \pmod{97}$ .

3) 3.a) Déduire des résultats établis aux questions 1) et 2) que l'on a :

$$1ab \times 49 \equiv 73 \pmod{97}$$

3.b) Vérifier que l'on a :  $49 \times 2 \equiv 1 \pmod{97}$ .

3.c) Déterminer l'année de naissance du capitaine.

**Le travail à exposer devant le jury**

1- Analyser les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

2- Présenter une solution de la question 3) de l'exercice.

3- Proposer un ou plusieurs exercices se rapportant au thème "Arithmétique".