Primitive et intégrale d'une fonction continue

O. Simon, Université de Rennes I

24 mai 2005

Avertissement : Ceci n'est pas le contenu d'une leçon de CAPES.
Dans le programme 2002 de terminales S, on introduit la définition de l'intégrale d'une fonction continue à l'aide des fonctions en escalier et non à l'aide des primitives.
Les deux définitions "intégrale" et "primitive" étant posées indépendamment, on en déduit des relations entre elles.

La définition axiomatique de $\mathbb{R}$ peut être donnée de façon équivalente avec l'axiome des suites adjacentes convergentes ou l'axiome de la borne supérieure.
Dans la définition de l'intégrale au sens de Riemann d'une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, cette propriété de $\mathbb{R}$ est essentielle. On peut utiliser l'un ou l'autre de ces axiomes :

- celui des suites adjacentes convergentes. Ceci est suggéré et plus ou moins développé dans certains livres de Terminales S, programme 2002, [Transmath], [Déclic].
- celui de la borne supérieure avec les sommes de Darboux. Ceci est traité dans les cours de licence et de classes prépa, [Monier], [Coste].

Pour une fonction quelconque, on sait dire si elle est intégrable au sens de Riemann, avec une définition à l'aide des sommes de Darboux. Dans le cas particulier d'une fonction continue, elle est toujours intégrable au sens de Riemann et on peut donc définir son intégrale de Riemann.

Ici, on a choisi de donner des éléments pour la démonstration du théorème admis en terminales.
Il est intéressant de voir qu'à part la formulation, on y retrouve les mêmes arguments et les mêmes techniques que dans celle utilisant la borne supérieure.

Prérequis :

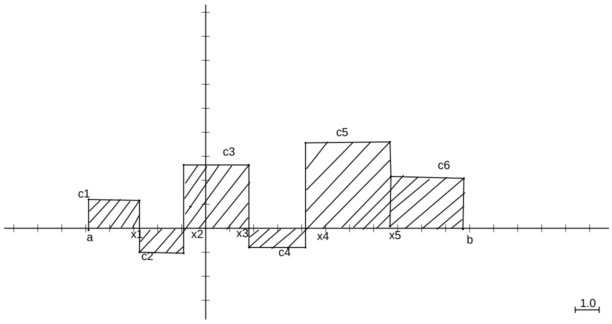
- Fonctions en escalier
- Théorème de Heine (uniforme continuité d'une fonction continue sur un intervalle fermé borné)
- Théorème des valeurs intermédiaires

1 Intégrale des fonctions en escalier

Pour démontrer les propriétés des fonctions en escalier, on a souvent besoin du lemme suivant.

Lemme 1.1 *Si f est une fonction en escalier définie à partir d'une subdivision $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$ et g une autre fonction en escalier définie à partir d'une subdivision $y_0 = a < y_1 < \ldots < y_p = b$, on peut les considérer définies sur une même subdivision, la subdivision réunion des deux précédentes $z_0 = a < z_1 < \ldots < z_r = b$ avec $r \leq n + p$, où $z_k = x_i$ ou $z_k = y_j$.*

Définition 1.2 *Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie par une subdivision $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$ et telle que $f(x) = c_i$ pour tout $x \in]x_{i-1}, x_i[$. On appelle intégrale de f sur $[a, b]$ le nombre réel $I(f) = c_1(x_1 - x_0) + c_2(x_2 - x_1) + \ldots + c_n(x_n - x_{n-1})$, que l'on note aussi de façon plus précise $\int_a^b f(t)dt$.*



Interprétation géométrique : le nombre $c_i(x_i - x_{i-1})$ est égal à $\pm$ l'aire du rectangle délimité par l'axe Ox, les droites verticales $x = x_{i-1}, x = x_i$ et le graphe de la fonction $y = f(x)$ sur $]x_{i-1}, x_i[$. Donc, $I(f)$ est la somme algébrique des aires des rectangles comptées positivement s'ils sont au-dessus de l'axe Ox et négativement s'ils sont au-dessous.

Propriétés : Pour toutes fonctions en escalier f, g définies sur $[a, b]$ avec $a < b$, on a les propriétés de l'intégrale

1. Linéarité : pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a
$$\int_a^b \lambda f(t) + \mu g(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt$$
2. Relation de Chasles : Si $c \in \mathbb{R}$ et f est une fonction en escalier,
$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$
3. Positivité :
   a) Si $f \geq 0$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.
   b) Si $f \leq g$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$
   c) On a $|\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b |f(t)|dt$

2 Définition de l'intégrale d'une fonction continue

Soit un intervalle fermé borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, avec $a < b$.

Proposition 2.1 *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

1. *Il existe deux suites (g_n) et (h_n) de fonctions en escalier telles que*
   – *pour tout n, pout tout $t \in [a, b], g_n(t) \leq f(t) \leq h_n(t)$*
   – *les suites $I(g_n)$ et $I(h_n)$ sont convergentes et ont même limite ℓ*
2. *Si (u_n) et (v_n) sont deux autres suites de fonctions en escalier ayant les deux propriétés du 1), alors la limite commune de $I(u_n)$ et $I(v_n)$ est la même que celle de $I(g_n)$ et $I(h_n)$.*

Ainsi le nombre ℓ est défini indépendamment des suites considérées.

Définition 2.2 *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On appelle intégrale de f sur $[a, b]$ le nombre réel ℓ défini par la proposition ci-dessus et on note $\ell = \int_a^b f(t)dt$.*

Proposition 2.3 *Si f est une fonction continue positive, l'intégrale de f sur $[a, b]$ est l'aire $\mathcal{A}(f)$ du domaine délimité par l'axe Ox, les droites $x = a, x = b$ et le graphe de $y = f(x)$.*

En effet, pour tout n, on a $I(g_n) \leq \mathcal{A}(f) \leq I(h_n)$.

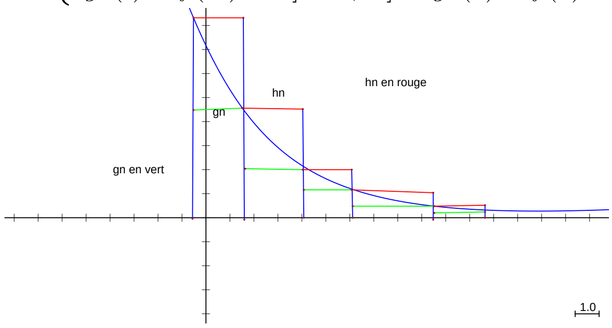
Démonstration de la proposition 2.1 :

1. <u>Existence des deux suites</u>.

   On prend une subdivision dont le pas tend vers 0, par exemple $\dfrac{b-a}{2^n}$, on a

$$x_0 = a, \ldots, x_i = a + i\frac{b-a}{2^n}, \ldots, x_{2^n} = b$$

   – Pour une fonction monotone, par exemple décroissante.
   On définit les deux suites $\left\{ \begin{array}{l} h_n(t) = f(x_{i-1}) \text{ sur } [x_{i-1}, x_i[\text{ et } h_n(b) = f(b) \\ g_n(t) = f(x_i) \text{ sur }]x_{i-1}, x_i] \text{ et } g_n(a) = f(a) \end{array} \right.$.



   On a $g_n(t) \leq f(t) \leq h_n(t)$ et

$$I(g_n) = \frac{b-a}{2^n}(f(x_1) + \ldots + f(b))$$

$$I(h_n) = \frac{b-a}{2^n}(f(a) + \ldots + f(x_{2^n-1}))$$

   On vérifie les propriétés suivantes :
   – $I(g_n) \leq I(h_n)$ car pour tout i, $f(x_i) \leq f(x_{i-1})$
   – $I(h_n) - I(g_n) = \dfrac{b-a}{2^n}(f(a) - f(b))$, qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
   – les deux suites sont monotones : $I(g_n)$ est croissante et $I(h_n)$ est décroissante.
     En effet, soit $y_0 = a < y_1 < \ldots < y_{2^{n+1}} = b$ la subdivision de pas $\dfrac{b-a}{2^{n+1}}$,
     alors on a $x_0 = a, x_1 = y_2, \ldots, x_i = y_{2i}, \ldots, x_{2^n} = y_{2^{n+1}} = b$ et

$$\begin{array}{rcl} I(g_{n+1}) & = & \dfrac{b-a}{2^{n+1}}(f(y_1) + f(y_2) + f(y_3) + \ldots + f(b)) \\ & = & \dfrac{b-a}{2^n}(\dfrac{1}{2}(f(y_1) + f(y_2)) + + \ldots + \dfrac{1}{2}(f(y_{2^{n+1}-1}) + f(b))) \end{array}$$

     comme $f(y_{2i-1}) \geq f(y_{2i}) = f(x_i)$, on a $\dfrac{1}{2}(f(y_{2i-1}) + f(y_{2i})) \geq f(x_i)$

$$\begin{array}{rcl} I(g_{n+1}) & \geq & \dfrac{b-a}{2^n}(f(x_1) + \ldots + f(b)) \\ I(g_{n+1}) & \geq & I(g_n) \end{array}$$

     On démontre de même que $I(h_n)$ est décroissante.
   On peut conclure que les deux suites $I(g_n)$ et $I(h_n)$ sont adjacentes et convergent vers un même nombre réel ℓ.

   – Pour une fonction continue quelconque sur $[a, b]$.
   On définit les deux suites :
   $h_n(a) = g_n(a) = f(a)$ et pour $t \in]x_{i-1}, x_i]$, $\left\{ \begin{array}{l} h_n(t) = M_i = \sup\{f(t), t \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ g_n(t) = m_i = \inf\{f(t), t \in [x_{i-1}, x_i]\} \end{array} \right.$
   On a $g_n(t) \leq f(t) \leq h_n(t)$ et

$$I(g_n) = \frac{b-a}{2^n}(m_1 + \ldots + m_{2^n})$$

$$I(h_n) = \frac{b-a}{2^n}(M_1 + \ldots + M_{2^n})$$

   On vérifie les propriétés suivantes :

- $I(g_n) \leq I(h_n)$ car, pour tout i, $m_i \leq M_i$
- $I(h_n) - I(g_n) = \dfrac{b-a}{2^n}((M_1 - m_1) + \ldots + (M_{2^n} - m_{2^n}))$.
  Pour obtenir que la limite est nulle lorsque n tend vers l'infini, il est nécessaire d'utiliser le théorème de Heine, qui donne l'uniforme continuité de f sur $[a,b]$.
  On peut détailler, on traduit l'uniforme continuité par :
  pour $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x, x' \in [a,b]$, si $|x - x'| < \eta$ alors $|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$.
  Pour $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $\dfrac{b-a}{2^N} < \eta$ et alors pour tout $i = 1, \ldots, 2^N$, $M_i - m_i \leq \varepsilon$.
  Ainsi,
  pour $\varepsilon > 0$, il existe N tel que, pour tout $n \geq N$, $0 \leq I(h_n) - I(g_n) \leq \dfrac{b-a}{2^n} 2^n \varepsilon = (b-a)\varepsilon$.
  Donc, $I(h_n) - I(g_n)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
- les deux suites sont monotones : $I(g_n)$ est croissante et $I(h_n)$ est décroissante.
  En effet, soit $y_0 = a < y_1 < \ldots < y_{2^{n+1}} = b$ la subdivision de pas $\dfrac{b-a}{2^{n+1}}$, on a alors les définitions :
  $h_{n+1}(a) = g_{n+1}(a) = f(a)$ et pour $t \in]y_{j-1}, y_j]$, $\left\{ \begin{array}{l} h_{n+1}(t) = M'_j = \sup\{f(t), t \in [y_{j-1}, y_j]\} \\ g_{n+1}(t) = m'_j = \inf\{f(t), t \in [y_{j-1}, y_j]\} \end{array} \right.$

  Alors on a $x_0 = a, x_1 = y_2, x_i = y_{2i}, x_{2^n} = y_{2^{n+1}}$ et

$$\begin{array}{rcl} I(g_{n+1}) & = & \dfrac{b-a}{2^{n+1}}(m'_1 + m'_2 + \ldots + m'_{2^{n+1}}) \\ & = & \dfrac{b-a}{2^n}(\dfrac{1}{2}(m'_1 + m'_2) + + \ldots + \dfrac{1}{2}(m'_{2^{n+1}-1} + m'_{2^{n+1}})) \end{array}$$

  comme $m'_{2i-1} \geq m_i$ et $m'_{2i} \geq m_i$ on a $\dfrac{1}{2}(m'_{2i-1} + m'_{2i}) \geq m_i$, ainsi

$$\begin{array}{rcl} I(g_{n+1}) & \geq & \dfrac{b-a}{2^n}(m_1 + \ldots + m_{2^n}) \\ I(g_{n+1}) & \geq & I(g_n) \end{array}$$

  On démontre de même que $I(h_n)$ est décroissante.

On peut conclure que les deux suites $I(g_n)$ et $I(h_n)$ sont adjacentes et convergent vers un même nombre réel ℓ.

2. Limite indépendante des suites : Soient (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant les conditions du (1), telles que $I(u_n)$ et $I(v_n)$ convergent vers une même limite ℓ'.
   Pour $n \in \mathbb{N}$, soient g_n et h_n les fonctions définies au (1) sur la subdivision $x_0, \ldots, x_{2^n}$ et si les fonctions u_n et v_n sont définies sur une subdivision $y_0, y_1, \ldots, y_q$, on considère la subdivision réunion des deux précédentes, $z_1, \ldots, z_r$ avec $r \leq 2^n + q$, et les deux fonctions en escalier sur cette subdivision :
   $s_n(a) = t_n(a) = f(a)$
   et pour $t \in]z_{i-1}, z_i]$, $\left\{ \begin{array}{l} s_n(t) = m'_i = \inf\{f(t), t \in [z_{i-1}, z_i]\} \\ t_n(t) = M'_i = \sup\{f(t), t \in [z_{i-1}, z_i]\} \end{array} \right.$
   Pour une même fonction f, plus il y a de points dans la subdivision, plus les minima sont grands et plus les maxima sont petits sur des intervalles emboîtés.
   Ainsi, ces fonctions vérifient :
   $g_n(t) \leq s_n(t) \leq f(t) \leq t_n(t) \leq h_n(t)$
   $u_n(t) \leq s_n(t) \leq f(t) \leq t_n(t) \leq v_n(t)$
   On a, d'après la positivité de l'intégrale des fonctions en escalier :
   $I(g_n) \leq I(s_n) \leq I(t_n) \leq I(h_n)$
   $I(u_n) \leq I(s_n) \leq I(t_n) \leq I(v_n)$
   En passant à la limite, on obtient
   $\ell = \lim_{n\to\infty} I(s_n) = \lim_{n\to\infty} I(t_n)$
   et $\ell' = \lim_{n\to\infty} I(s_n) = \lim_{n\to\infty} I(t_n)$
   donc $\ell = \ell'$.

3 Propriétés de l'intégrale

Les propriétés de

1. linéarité,
2. la relation de Chasles
3. positivité,

valables pour les fonctions en escalier, se démontrent aisément pour toute fonction continue, par passage à la limite.
Pour démontrer ces propriétés, il faut considérer les suites de fonctions en escalier définissant l'intégrale des fonctions continues sur $[a, b]$. La technique est de montrer, par exemple pour l'additivité, que

$$\int_a^b (f(t) + g(t))dt - \int_a^b f(t)dt - \int_a^b g(t)dt = 0$$

en montrant que pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$-\varepsilon \leq \int_a^b (f(t) + g(t))dt - \int_a^b f(t)dt - \int_a^b g(t)dt = 0 \leq \varepsilon$$

Ceci s'obtient en considérant les fonctions en escalier, g_n, h_n, ϕ_n, ψ_n telles que

$$\begin{array}{rccccc} & g_n & \leq & f & \leq & h_n \\ & \phi_n & \leq & g & \leq & \psi_n \\ \text{alors} & g_n + \phi_n & \leq & f + g & \leq & h_n + \psi_n \end{array}$$

avec $I(h_n) - (g_n) \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $I(\psi_n) - I(/phi_n) \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. On obtient

$$\begin{array}{rccccc} & I(g_n) & \leq & I(f) & \leq & I(h_n) \\ & I(\phi_n) & \leq & I(g) & \leq & I(\psi_n) \\ \text{et} & I(g_n + \phi_n) & \leq & I(f + g) & \leq & I(h_n + \psi_n) \\ \text{ainsi} & I(g_n + \phi_n) - I(h_n) - I(\psi_n) & \leq & I(f + g) - I(f) - I(g) & \leq & I(h_n + \psi_n) - I(g_n) - I(\phi_n) \end{array}$$

Comme l'intégrale est additive sur les fonctions en escaliers, $I(g_n + \phi_n) = I(g_n) + I(\phi_n)$ et $I(h_n + \psi_n) = I(h_n) + I(\psi_n)$ et donc

$$-\varepsilon \leq I(f + g) - I(f) - I(g) \leq \varepsilon$$

Proposition 3.1 *Soit $\mathcal{C}([a, b])$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[a, b]$, l'application*

$$\phi : \mathcal{C}([a, b])^2 \to \mathbb{R}$$

définie par $\phi(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire.

Ceci résulte des trois propriétés précédentes.

Proposition 3.2 *(Théorème de la moyenne) Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Il existe $c \in [a, b]$ tel que $\dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b f(t)dt = f(c)$.*

Démonstration :
Soient M et m les bornes de f sur $[a, b]$, alors $m(b - a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b - a)$ et donc

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \leq M$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f([a, b]) = [m, M]$, donc il existe $c \in [a, b]$ tel que $\dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b f(t)dt = f(c)$.

4 Définition d'une primitive

Définition 4.1 *Soient f et F deux fonctions définies sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que F est une primitive de f sur $]a,b[$ si F est dérivable et si $F' = f$ sur $]a,b[$.*

Proposition 4.2 *Soient f et F deux fonctions définies sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, telles que F soit une primitive de f, alors l'ensemble des primitives de f sur $]a,b[$ est l'ensemble des fonctions définies pour chaque $k \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in]a,b[$ par*

$$G(x) = F(x) + k$$

Si $x_0 \in]a,b[$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique fonction G telle que G soit une primitive de f et $G(x_0) = y_0$.

5 Lien entre primitive et intégrale d'une fonction continue

Proposition 5.1 *(Existence) Soit f une fonction continue sur $]a,b[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. la fonction F définie, pour $x \in]a,b[$, par*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est la primitive de f telle que $F(a) = 0$.

Démonstration :
- On a $F(a) = 0$.
- On montre que F est dérivable en tout point x_0 de $]a,b[$.

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0}\left(\int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt\right) = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(t)dt$$

  D'après le théorème de la moyenne, il existe $c_x \in]x, x_0[$ ($]x_0, x[$ selon l'ordre de x et x_0) tel que

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(c_x)$$

  Comme f est continue en x_0, on a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} f(c_x) = f(x_0)$$

Corollaire 5.2 *Toute fonction continue sur $[a,b]$ admet une infinité de primitives.*

6 Applications

1. Calcul pratique d'une intégrale

   Proposition 6.1 *Soient f et F deux fonctions définies sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, telles que F soit une primitive de f. Alors*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

   .

2. Calcul d'aires planes dont les contours sont définis par des graphes de fonctions continues.
   Soient f et g deux fonctions définies et continues sur $[a,b]$ telles que $g \leq f$. Soient

$$E = \{M(x,y) | a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$$

$$F = \{M(x,y) | a \leq x \leq b \text{ et } g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

   Alors l'aire de E est $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ et l'aire de F est $\displaystyle\int_a^b (f(t) - g(t))dt$
   Exemples

3. Calcul de limite de suites de la forme $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$ (sommes de Riemann).

- $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$, alors $\lim_{n\to\infty} u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \int_1^2 \frac{1}{x}dx = \ln(2)$
- $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$, alors $\lim_{n\to\infty} u_n = \int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln(2)$
- $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$, alors $\lim_{n\to\infty} u_n = \int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}$

4. Calcul de volumes : soient $a < b$ et un solide K de $\mathbb{R}^3$ limité par les plans $z = a$ et $z = b$ et tel que l'aire de la section de cote z est une fonction continue $S(z)$.
   Soit $z_0 \in]a, b[$ et $V(z_0)$ le volume du solide entre les plans $z = a$ et $z = z_0$,
   montrer que $V'(z_0) = S(z_0)$. En déduire que le volume du solide est $\int_a^b S(z)dz$.
   Calculer le volume d'un cône de rayon R et de hauteur h.
5. Inégalités de Schwarz : soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$, alors

$$(\int_a^b f(t) \times g(t)dt)^2 \leq \int_a^b f(t)^2 dt \times \int_a^b g(t)^2 dt$$

7 Remarques

- Soit f définie sur un intervalle $[a, b]$ telle que $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ soit définie pour tout $x \in [a, b]$. F est-elle une fonction dérivable ?
  Oui, si f est une fonction continue
  Non en général,
  contre-exemple : soit f définie sur $[1, 2]$ par $\begin{cases} f(t) = 0 \text{ sur } [0, 1[\\ f(t) = 1 \text{ sur } [1, 2] \end{cases}$
  On obtient $\begin{cases} F(x) = 0 \text{ sur } [0, 1] \\ F(x) = x - 1 \text{ sur } [1, 2] \end{cases}$
  la fonction F n'est pas dérivable en $x_0 = 1$.

Références

[Transmath] Transmath, programme 2002, terminale S obligatoire, Nathan

[Déclic] maths, Terminale S enseignement obligatoire et de spécialité, Hachette livre 2002

[Coste] DEUG Sciences mention MASS-MIAS, Mathématiques 2, Notes de cours d'analyse, Michel Coste 1997. Université de Rennes 1

[Dixmier] Cours de mathématiques,

[Monier] Analyse 1, 1ere année MPSI,PCSI,PTSI. Jean-Marie Monier. Dunod, 1999.