Esquisse de corrigé du problème d'analyse 1, septembre 2009

1.a. Par continuité de f', il existe $0 < \alpha < 1$ qui majore $|f'(x)|$ sur un petit intervalle autour de l. On peut ensuite utiliser l'inégalité des accroissements finis.

1.b. Par convergence de la suite, il existe un rang N à partir duquel les termes de la suite sont dans le petit intervalle de la question précédente. On peut donc utiliser l'inégalité de la question 1.a., combinée à une récurrence.

1.c. Découle directement de 1.b.

2.a. Prenons un entier n. D'après la formule de Taylor-Lagrange, il existe c_n entre l et u_n tel que $f(u_n) = f(l) + (u_n - l)f'(l) + (u_n - l)^2 f"(c_n)$. On pose $r_n = \frac{(u_n - l)f"(c_n)}{f'(l)}$. Comme $f"$ est continue, elle est bornée près de l, et la suite $(|r_n|)_n$ est majorée, à une constante multiplicative près, par la suite $(|u_n - l|)_n$.

2.b. Par récurrence.

3.a. Si $1 + r_n = 0$ alors $u_{n+1} = l$ et la suite $(u_n)_n$ serait donc stationnaire, ce qui est exclu. La série est donc bien définie.

De plus, la valeur absolue de son terme général est équivalente à $|r_n|$ (car r_n tend vers zéro), qui est le terme général d'une série convergente d'après 2.a. On conclut par comparaison de séries à termes positifs.

3.b. Cette suite est de signe constant à partir d'un certain rang puisque r_n tend vers zéro. Il suffit donc de montrer la convergence de sa valeur absolue. Composée avec la fonction logarithme, elle convergence d'après 3.a. Donc notre suite converge vers l'exponentiel de cette limite, qui est en particulier un réel a non nul.

3.c. D'après 2.b. la suite $(u_n - l)_n$ est équivalente à $f'(l)(u_0 - l)a$, donc $c = a(u_0 - l)$. En particulier c, et donc la vitesse de convergence, dépendend de u_0.