Problème d'analyse 2

à rendre pour le 02/10/2008

Soit $a \in]0,1[$.

Préliminaire.
1. Pour $y \in \mathbb{R}$, posons $S_n(y) = \sum_{k=0}^{n} y^k$. Donner une autre expression de $S_n(y)$.

Partie 1.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = (-1)^n x^{n-a}$.
1. Soit $F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$. Donner une autre expression de $F_n(x)$.
2. Montrer que la série de fonctions $\sum_n f_n$ converge simplement sur $]0,1[$. Pour $x \in]0,1[$, expliciter $F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$.
3. Soit $\epsilon \in]0, \frac{1}{2}[$. Montrer que $\sum_n f_n$ converge uniformément sur $[\epsilon, 1-\epsilon]$.

Partie 2.
Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = (-1)^n \frac{x^{n+1-a}}{n+1-a}$.
1. Soit $x \in]0,1[$. Montrer que $|\frac{g_{n+1}(x)}{g_n(x)}| \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que la série de fonctions $\sum_n g_n$ converge simplement sur $[0,1]$. Donner une majoration du reste $R_n(x)$.
3. Montrer que la série de fonctions $\sum_n g_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ et que sa somme G y est continue.

Partie 3.
Soit H la fonction de $]0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $H(x) = \frac{1}{x^a(1+x)}$.
1. Justifier les égalités suivantes:

$$\int_{\epsilon}^{\frac{1}{2}} H(x)dx = G(\frac{1}{2}) - G(\epsilon)$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1-\epsilon} H(x)dx = G(1-\epsilon) - G(\frac{1}{2})$$

2. Montrer que H admet une intégrale généralisée sur $]0,1]$ et que la valeur de cette intégrale est $G(1)$.