Etude des branches infinies de la courbe représentative d'une fonction

F. Pène, O. Simon

12 décembre 2003

Avertissement :
Ceci n'est pas le contenu de la leçon de CAPES.
Ce document est une mise au point des connaissances à avoir pour cette leçon.
Les définitions données ici (2.1, 3.1, 4.1) peuvent être remplacées par les propositions-définitions (2.2, 4.2) ou les corollaires (3.3, 3.4) qui les suivent. Si ces définitions plus intrinsèques sont utilisées, il est impératif de savoir démontrer les résultats qui suivent (caractérisation, unicité). Si on ne peut établir ceux-ci, il vaut mieux faire une leçon au niveau terminale, bien dominée.

Prérequis :

- $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$,
- limite en un point de $\mathbb{R}$, de $\overline{\mathbb{R}}$,
- angle de deux droites (définition modulo π).

Notations :
Soit $\mathcal{P}$ le plan euclidien muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et de la distance euclidienne d.
Soient f une fonction définie sur $D_f \subset \mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_f$ son graphe dans $\mathcal{P}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, tel que x_0 est la borne d'un intervalle I inclus dans D_f sur lequel f est continue.
Pour tout $x \in D_f$, on notera M_x le point de coordonnées $(x, f(x))$, appartenant à $\mathcal{C}_f$.

1 Branches infinies de la courbe représentative d'une fonction

Définition 1.1 *On dit que $\mathcal{C}_f$ admet une branche infinie en x_0 si*

$$\lim_{x \to x_0, x \in I} d(O, M_x) = +\infty,$$

Si $x_0 \in \mathbb{R}$, selon la position de I et x_0, on a une branche infinie à droite ou à gauche de x_0.

Remarque 1 *: Soit $O' \in \mathcal{P}$, alors $\mathcal{C}_f$ admet une branche infinie en x_0, si et seulement si*

$$\lim_{x \to x_0, x \in I} d(O', M_x) = +\infty.$$

L'inégalité triangulaire, $d(O, M_x) \leq d(O, O') + d(O', M_x)$, donne le résultat.

Comme on a $d(O, M_x) = \sqrt{x^2 + f(x)^2}$, selon la valeur de x_0, on a deux cas à considérer :

- Si $x_0 \in \mathbb{R}$, alors $\mathcal{C}_f$ admet une branche infinie en x_0, si et seulement si

  $$\lim_{x \to x_0, x \in I} |f(x)| = +\infty.$$

  Comme f est continue sur I, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on obtient une des deux limites :

  $$\lim_{x \to x_0, x \in I} f(x) = +\infty, \lim_{x \to x_0, x \in I} f(x) = -\infty$$

- Si $x_0 \in \{+\infty, -\infty\}$, alors $\mathcal{C}_f$ admet toujours une branche infinie en x_0, mais on n'a pas de précision sur $f(x)$ au voisinage de x_0.

On peut dire, dans chacun de ces deux cas, qu'au moins une des coordonnées du graphe devient infinie au voisinage de x_0.

Exemples :

- $f(x) = x^2$ admet une branche infinie en $+\infty$ et en $-\infty$
- $f(x) = \dfrac{1}{x}$ admet
  - des branches infinies à droite et à gauche en $x_0 = 0$.
  - des branches infinies en $+\infty$ et en $-\infty$.
- $f(x) = \dfrac{1}{x} e^{(\frac{1}{x})}$ admet :

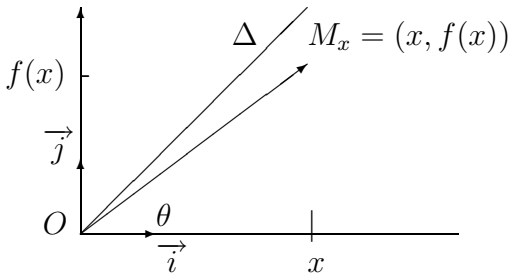
  - une branche infinie à droite en $x_0 = 0$.
  - des branches infinies en $+\infty$ et en $-\infty$.
- $f(x) = \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ n'admet pas de branche infinie en $x_0 = 0$.
- $f(x) = \tan x$ admet des branches infinies à droite et à gauche en $\dfrac{\pi}{2}$.

Dans la suite, on suppose que $\mathcal{C}_f$ admet une branche infinie en x_0.

2 Direction asymptotique

Définition 2.1 *Soit Δ une droite passant par O. On dit que Δ est une direction asymptotique de $\mathcal{C}_f$ en x_0 si $\lim_{x\to x_0, x\in I}(\widehat{(OM_x)}, \Delta) = 0$.*
On dit aussi que $\mathcal{C}_f$ admet la droite Δ pour direction asymptotique en x_0.

On considère l'ensemble des droites passant par O muni de la distance d, où $d(\Delta, \Delta')$ est la mesure angulaire dans $]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$ de l'angle $(\widehat{\Delta, \Delta'})$. Alors, la définition précédente peut se traduire par $\lim_{x\to x_0, x\in I}(OM_x) = \Delta$.



Proposition-Définition 2.2 *Soit Δ une droite passant par O.*

1. *$\Delta = (y = ax)$ est une direction asymptotique de $\mathcal{C}_f$ en x_0 si et seulement si $\lim_{x\to x_0, x\in I}\dfrac{f(x)}{x}$ existe et vaut $a \in \mathbb{R}$*
2. *$\Delta = (Oy)$ est une direction asymptotique de $\mathcal{C}_f$ en x_0 si et seulement si $\lim_{x\to x_0, x\in I}\dfrac{f(x)}{x}$ existe et est infinie ($+\infty$ ou $-\infty$).*

Démonstration :

- $\Delta = (y = ax)$ est équivalent à $(\widehat{(Ox), \Delta}) = \theta \in]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$, et $\tan\theta = a$, Δ est une direction asymptotique de $\mathcal{C}_f$ en x_0

$$\iff \lim_{x\to x_0, x\in I}(\widehat{(Ox), (OM_x)}) = \theta \ (\pi)$$

$$\iff \lim_{x\to x_0, x\in I} \tan(((\widehat{(Ox),(OM_x)})) = \tan(\theta)$$

$$\iff \lim_{x\to x_0, x\in I} \frac{f(x)}{x} = \tan(\theta)$$

– $\Delta = (Oy)$ est équivalent à $((\widehat{(Ox),\Delta}) = \frac{\pi}{2}\ (\pi)$,
Δ est une direction asymptotique de $\mathcal{C}_f$ en x_0

$$\iff \lim_{x\to x_0, x\in I} ((\widehat{(Ox),(OM_x)}) = \frac{\pi}{2}\ (\pi)$$

$$\iff \lim_{x\to x_0, x\in I} |\frac{f(x)}{x}| = +\infty$$

D'après la continuité de f au voisinage de x_0 et le théorème des valeurs intermédiaires, ceci est équivalent à

$\lim_{x\to x_0, x\in I} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ ou $\lim_{x\to x_0, x\in I} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

Corollaire 2.3 *Si Δ est une direction asymptotique de $\mathcal{C}_f$ en x_0, alors elle est unique.*

Exemples : deux cas sont à considérer

1. Si $x_0 \in \mathbb{R}$, on a $\lim_{x\to x_0, x\in I} f(x) = +\infty$, ou $\lim_{x\to x_0, x\in I} f(x) = -\infty$, donc $\lim_{x\to x_0, x\in I} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ ou $-\infty$.
   On a toujours (Oy) direction asymptotique de $\mathcal{C}_f$ en x_0

2. Si $x_0 \in \{+\infty, -\infty\}$, on a toutes les possibilités :
   – $f(x) = x^2$, alors (Oy) est direction asymptotique de $\mathcal{C}_f$ en x_0
   – $f(x) = \sqrt{x}$, alors (Ox) est direction asymptotique de $\mathcal{C}_f$ en x_0
   – $f(x) = 2x + \sin x$, alors $(y = 2x)$ est direction asymptotique de $\mathcal{C}_f$ en x_0
   – $f(x) = x \sin x$ n'admet pas de direction asymptotique en x_0.

3 Droite asymptote

Définition 3.1 *Soit D une droite du plan, on dit que D est une droite asymptote à $\mathcal{C}_f$ en x_0 si $\lim_{x\to x_0, x\in I} d(M_x, D) = 0$.*

Proposition 3.2 *Si D est la droite d'équation $ax+by+c = 0$, a et b non nuls simultanément, alors D est une droite asymptote à $\mathcal{C}_f$ en x_0 si et seulement si $\lim_{x\to x_0, x\in I} ax + bf(x) + c = 0$.*

Démonstration :
On utilise la formule de la distance d'un point $M = (x_M, y_M)$ à une droite D d'équation $ax + by + c = 0$:

$$d(M, D) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

d'où le résultat.

Corollaire 3.3 *Si $x_0 \in \mathbb{R}$, et si D est une droite asymptote à $\mathcal{C}_f$ en x_0 alors D est l'unique droite d'équation $x = x_0$. On dit que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale en x_0.*

Démonstration : Lorsque x tend vers x_0, la quantité $ax_M + c = ax + c$ tend vers une valeur finie $ax_0 + c$ et si $b \neq 0$ alors $by_M = bf(x)$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.
Donc $\lim_{x \to x_0, x \in I} ax + bf(x) + c = 0$ si et seulement si $b = 0$ et $\dfrac{-c}{a} = x_0$. On a donc une unique asymptote $D = (x = x_0)$.

Corollaire 3.4 *Si $x_0 \in \{+\infty, -\infty\}$, on a les équivalences :*

1. *D est une droite asymptote à $\mathcal{C}_f$ en x_0*
2. *D a pour équation $y = ax + b$ et $\lim_{x \to x_0, x \in I} f(x) - (ax + b) = 0$.*
3. *il existe une fonction $\phi(x)$ définie au voisinage de x_0, telle que $f(x) = ax + b + \phi(x)$ et $\lim_{x \to x_0, x \in I} \phi(x) = 0$.*

Si $D = (y = b)$ est une droite asymptote à $\mathcal{C}_f$ en x_0, on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale en x_0.
Si $\mathcal{C}_f$ admet une droite asymptote en x_0, alors elle est unique.

Démonstration :
1) $\Longleftrightarrow$ 2)
Une droite D' d'équation $x = \alpha$ ne peut pas être asymptote en x_0, en effet, on a $d(M_x, D') = |x - \alpha|$ qui tend vers l'infini quand x tend vers x_0. Donc si D est une droite asymptote à $\mathcal{C}_f$ en x_0, alors dans son équation, le coefficient de y est non nul et elle peut s'écrire $y = ax + b$.
D'après 3.2, on a le résultat.
2) $\Longleftrightarrow$ 3) est évident.
Soient D et D' deux droites asymptotes à $\mathcal{C}_f$ en x_0, d'équations respectives $ax+b = y$ et $a'x+b' = y$, alors d'après 2), on a $\lim_{x \to x_0, x \in I}(a-a')x+(b-b') = 0$, il est nécessaire que $a = a'$ et $b = b'$, on a donc l'unicité de la droite asymptote si elle existe, d'où le résultat.

Corollaire 3.5 *Si $x_0 \in \{+\infty, -\infty\}$, et si $\mathcal{C}_f$ admet une droite asymptote en x_0, D d'équation $(y = ax + b)$, alors la droite $\Delta = (y = ax)$ est la direction asymptotique de $\mathcal{C}_f$ en x_0 et on a $\lim_{x \to x_0, x \in I} d(M_x, \Delta) = d(D, \Delta)$.*

Démonstration :
D'après 3.4, on a $\lim_{x \to x_0, x \in I} \dfrac{f(x)}{x} = a$, d'où la direction asymptotique $\Delta = (y = ax)$.
On note H_x et H'_x les projections orthogonales respectives de M_x sur D et sur Δ. D'après l'inégalité triangulaire (seconde forme), on a

$$|d(M_x, \Delta) - d(\Delta, D)| = |M_x H'_x - H_x H'_x| \leq |M_x H_x|$$

ce qui donne le résultat.

4 Branche parabolique

Définition 4.1 *Si $x_0 \in \{+\infty, -\infty\}$, et si $\mathcal{C}_f$ admet une direction asymptotique Δ en x_0, on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction Δ en x_0 si $\lim_{x \to x_0, x \in I} d(M_x, \Delta) = +\infty$*

Proposition-Définition 4.2 *Si $x_0 \in \{+\infty, -\infty\}$, $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction Δ en x_0 si et seulement si*

1. *soit $\lim_{x \to x_0, x \in I} \dfrac{f(x)}{x}$ existe et est infinie, alors $\Delta = (Oy)$*
2. *soit $\lim_{x \to x_0, x \in I} \dfrac{f(x)}{x}$ existe et vaut $a \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x \to x_0, x \in I} f(x) - ax$ existe et est infinie, alors $\Delta = (y = ax)$*

Exemples :

- $f(x) = 2x + \ln x$ admet une branche parabolique en $+\infty$ de direction $y = 2x$
- $f(x) = 2x + \sqrt{x}$ admet une branche parabolique en $+\infty$ de direction $y = 2x$
- $f(x) = x^n$ pour $n > 1$ admet une branche parabolique en $+\infty$, et en $-\infty$, de direction (Oy).
- $f(x) = 2x + \sin x$ n'admet pas de branche parabolique en $+\infty$, ni en $-\infty$
- $f(x) = \dfrac{x^2 + x \cos x}{x + 1}$ n'admet pas de branche parabolique en $+\infty$, ni en $-\infty$

5 Recherche pratique du comportement d'une branche infinie

1. Si $x_0 \in \mathbb{R}$, on étudie $\lim_{x \to x_0, x \in I} f(x)$ et si $\mathcal{C}_f$ admet une branche infinie en x_0, alors la droite $D = (x = x_0)$ est asymptote.
2. Si $x_0 \in \{+\infty, -\infty\}$, on a toujours une branche infinie. On étudie $\lim_{x \to x_0, x \in I} \dfrac{f(x)}{x}$:
   - cette limite existe et vaut $a \in \mathbb{R}$, alors $\mathcal{C}_f$ admet une direction asymptotique $\Delta = (y = ax)$, de plus :
     - si $\lim_{x \to x_0, x \in I} f(x) - ax = b \in \mathbb{R}$, alors $D = (y = ax + b)$ est une droite asymptote à $\mathcal{C}_f$.
     - si $\lim_{x \to x_0, x \in I} f(x) - ax$ existe et est infinie, alors $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique en x_0.
     - si $\lim_{x \to x_0, x \in I} f(x) - ax$ n'existe pas, $\mathcal{C}_f$ n'admet ni asymptote ni branche parabolique en x_0.
   - cette limite existe et appartient à $\{+\infty, -\infty\}$, alors $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction $\Delta = (Oy)$.
   - cette limite n'existe pas, alors $\mathcal{C}_f$ n'admet pas de direction asymptotique.

6 Compléments

6.1 Calcul de distance

Lemme 6.1 *La distance d'un point $M = (x_M, y_M)$ à une droite D d'équation $ax + by + c = 0$ est donnée par :*

$$d(M, D) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Deux démonstrations :

Dans chaque cas, on considère la projection orthogonale $H = (x_1, y_1)$ de M sur D, on a $d(M, D) = MH$, d'après le théorème de Pythagore ; soit $l = MH$.

1. On utilise le calcul vectoriel. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire de (MH), on a, par exemple,

$$\overrightarrow{u} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

et $\overrightarrow{MH} = \begin{pmatrix} x_1 - x_M \\ y_1 - y_M \end{pmatrix} = \pm l\overrightarrow{u}$, donc

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_M \\ y_1 - y_M \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \pm l\overrightarrow{u} . \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Ainsi $|ax_1 + by_1 - ax_M - by_M| = l\sqrt{a^2 + b^2}$
Comme $H \in D$, on a l'égalité $ax_1 + by_1 + c = 0$ et on obtient le résultat.

2. On distingue deux cas, selon la position de D, verticale ou non.
Si D est verticale d'équation $x = c$, on a $d(M, D) = |x - c|$.
Sinon l'équation de D peut s'écrire $y = mx + p$ où $m = \dfrac{-a}{b}$ est la pente de D.
On considère $N = (x_M, mx_M + p) \in D$ et le triangle rectangle MHN.
Alors l'angle α de D avec (Ox) est égal à $(\widehat{HMN})$. Ainsi,

$$m = \tan\alpha, \ |\tan\alpha| = \frac{NH}{MH} = \frac{NH}{l} \Longrightarrow NH = l|m|$$

D'après le théorème de Pythagore, $MN^2 = NH^2 + MH^2 = l^2(1 + m^2)$, d'où
$MN = |y_M - mx_M - p| = l\sqrt{1 + m^2}$
ce qui donne le résultat.

6.2 Courbes asymptotes ?

Avertissement : Il faut éviter de parler de courbes aymptotes dans cette leçon, il faut se limiter aux droites asymptotes.
La définition donnée pour "une droite D est asymptote à une courbe $\mathcal{C}$ " ne peut pas se généraliser en "une courbe Γ est asymptote à une courbe $\mathcal{C}$ " .
On remarque d'abord qu'elle n'est pas symétrique en Γ et $\mathcal{C}$ et qu'elle donne des aberrations.

Exemples :

- si Γ est la courbe représentative de $f(x) = \sin x^2$ et $\mathcal{C}$ la droite $(y = 0)$, alors Γ serait asymptote à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ n'est pas une droite asymptote à Γ.
- Les courbes représentatives de $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^2 + 1$ sont asymptotes en ce sens, mais ne vérifient pas la propriété 3.4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la quantité $g(x) - f(x) = 1$ est une constante non nulle.

Références

[1] L'épreuve sur dossier à l'oral du CAPES de maths, Tome II Analyse. Thierry Lambre. Ed. Ellipses.

[2] Cours de mathématiques générales, tome 5, Application de l'analyse à la géométrie. Ramis, Deschamps, Odoux. Ed. Masson.

[3] Cours de mathématiques spéciales, tome 4, Cagnac, Ramis, Commeau. Ed. Masson

[4] Géométrie pour l'agrégation interne. P. Tauvel. Ed. Masson.