Préparation au CAPES de mathématiques
(Concours externe 2009)

Exercices sur le raisonnement par récurrence
et les coniques affines

Exercice 1

1 Soit n un entier naturel tel que 7 divise $8^n + 3$. Montrer qu'alors 7 divise $8^{n+1} + 3$.
2 Soit n un entier naturel tel que 7 divise $8^n + 6$. Montrer qu'alors 7 divise $8^{n+1} + 6$.
3 Est-il vrai que pour tout entier naturel n, $8^n + 3$ est multiple de 7 ? Sinon, précisez les entiers naturels pour lesquels cette propriété est vraie. Même question avec $8^n + 6$.

Exercice 2

1 Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel n, $n^3 - n$ est multiple de 3 (on s'attachera à soigner la rédaction).
2 Démontrez le résultat de la question précédente sans utiliser de raisonnement par récurrence.

Exercice 3

Critiquez le raisonnement suivant : « Soit r un entier strictement positif. On va montrer par récurrence la propriété suivante : il existe un polynôme P à coefficients rationnels tel que pour tout entier n strictement positif, on a

$$\sum_{k=1}^{n} k^r = P(n).$$

La propriété est vérifiée pour $n = 1$. En effet $\sum_{k=1}^{1} k^r = 1 = P(1)$ où P est le polynôme constant égal à 1. Supposons la propriété vérifiée pour un n strictement positif. On a alors

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^r = \sum_{k=1}^{n} k^r + (n+1)^r.$$

Par hypothèse de récurrence, $\sum_{k=1}^{n} k^r$ s'écrit $P(n)$ où P est un polynôme à coefficients rationnels. En posant $Q(X) = P(X-1) + X^r$, on a donc $\sum_{k=1}^{n+1} k^r = Q(n+1)$. Ainsi la propriété est vraie au rang $n+1$. La propriété étant vraie pour $n = 1$ et héréditaire, elle est vraie pour tout entier n strictement positif. »

Exercice 4

Soit E un espace euclidien. On note $\langle\, , \rangle$ le produit scalaire. On rappelle qu'un endomorphisme de E est dit *auto-adjoint* s'il vérifie

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle u(x)\, , \, y\rangle = \langle x\, , \, u(y)\rangle\,.$$

Cette propriété entraîne que si F est un sous-espace de E stable par u, alors $F^\perp$ est encore stable par u (on pourra le vérifier). On *admet* ici la propriété plus délicate suivante : tout endomorphisme auto-adjoint admet une valeur propre. En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrez alors que tout endomorphisme auto-adjoint admet une base de vecteurs propres qui est orthonormée. On demande de rédiger *très* soigneusement la récurrence. En particulier, on s'attachera à expliciter l'hypothèse de récurrence.

Exercice 5

Soit $\mathscr{P}$ un plan affine réel, muni d'un repère affine $\mathcal{R}$. Pour chacune des expressions $P(x,y)$ ci-dessous, on considère l'ensemble $\mathscr{C}$ des points de $\mathscr{P}$ dont les coordonnées (x,y) dans le repère $\mathcal{R}$ vérifient $P(x,y)=0$. On demande alors de déterminer *si possible* un repère affine $\mathcal{R}'$ tel que $\mathscr{C}$ soit l'ensemble des points de $\mathscr{P}$ dont les coordonnées (X,Y) dans le repère $\mathcal{R}'$ vérifient soit $X^2-Y^2=1$, soit $X^2+Y^2=1$, soit $Y^2=X$; on donnera (dans le repère $\mathcal{R}$) les équations des asymptotes et les coordonnées du centre, s'il y a lieu. S'il n'est pas possible de trouver un tel repère $\mathcal{R}'$, on demande de décrire $\mathscr{C}$.

1 $P(x,y)=x\,y+x+y-1$
2 $P(x,y)=x\,y+x+y+1$
3 $P(x,y)=x\,y+x+y$
4 $P(x,y)=(x+y)^2+y^2-1$
5 $P(x,y)=(x+y)^2+y^2+1$
6 $P(x,y)=(x+y)^2+y^2$
7 $P(x,y)=x^2+2xy+y^2+6x+6y+10$
8 $P(x,y)=x^2+2xy+y^2+4x+6y+5$
9 $P(x,y)=34x^2+42xy+13y^2+22x+14y+4$
10 $P(x,y)=4x^2+12xy+9y^2+41x+62y+111$
11 $P(x,y)=51x^2+32xy+5y^2-14x-4y-2$
12 $P(x,y)=169x^2+494xy+361y^2+52x+76y+3$
13 $P(x,y)=-21x^2+16xy-3y^2-80x+28y-43$
14 $P(x,y)=37x^2-12xy+y^2+54x-10y+35$
15 $P(x,y)=121x^2+66xy+9y^2-22x-6y+1$

Exercice 6

Déterminer l'ensemble des automorphismes du plan affine qui envoient une hyperbole (respectivement une parabole, respectivement une ellipse) sur elle-même.