Université de Rennes 1
UFR Mathématiques
CAPES

Ronan Quarez
Année 2008-2009

Intégrales-Primitives

Questions

Exercice 1

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Alors

1) $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est une primitive de f ?
2) Toute primitive de f est de la forme $x \mapsto \int_{x_0}^x f(t)dt$.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

a) Si F est paire a-t-on f impaire ? Si f est paire a-t-on F impaire ?
b) Si F est T-périodique a-t-on f T-périodique ? Si f est T-périodique a-t-on F T-périodique ?

Un peu de calcul

Exercice 3

(i) Calculer $\int \cos^4 t \sin^3 t dt$.
(ii) Calculer $\int \cos^4 t \sin^2 t dt$.

Exercice 4

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue telle que pour tout $x \in [a, b]$, $f(a + b - x) = f(x)$. Montrer que

$$\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx.$$

Positivité, Formule de la moyenne...

Exercice 5

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$.
Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 6

Soit $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que si $\int_0^\pi f(t)\sin t dt = 0$ alors il existe $a \in]0,\pi[$ tel que f s'annule en a.

Exercice 7

Soit f continue sur $[0,1]$ et telle que, pour tout entier $k = 0, 1 \ldots, n$ on a $\int_0^1 t^k f(t)dt = 0$. Montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois sur $[0,1]$

Limites d'intégrales

Exercice 8

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\int_0^1 t^n f(t)dt \to 0$.

Exercice 9

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 f(t)\sin(nt)dt$.
Montrer que $I_n \to 0$.

Exercice 10

On suppose que $\pi = \frac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que la fonction polynomiale $P_n(x) = \frac{1}{n!}x^n(bx-a)^n$ et ses dérivées successives prennent en 0 et en $\frac{a}{b}$ des valeurs entières.

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^\pi P_n(t)\sin t dt$. Montrer que $I_n \to 0$.

c) Conclure.

Exercice 11

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue. Déterminer $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.

Exercice 12

1) Déterminer $\lim_{x\to 0^+} \int_x^{2x} \frac{e^t dt}{t} dt$.

2) Déterminer $\lim_{x\to +\infty} \int_x^{2x} \frac{\sin t dt}{t} dt$.

Fonctions définies par une intégrale

Exercice 13

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que les fonctions suivantes sont dérivables et calculer leur dérivée :

a) $x \mapsto \int_{2x}^{x^2} f(t)dt$,

b) $x \mapsto \int_0^x xf(t)dt$,

c) $x \mapsto \int_{x^2}^x f(t+x)dt$.

Exercice 14

Soit $f(t) = \frac{\sinh t}{t}$ pour $t \neq 0$ et $f(0) = 1$. On pose $F(x) = \int_x^{2x} f(t)dt$.

a) Montrer que F est bien définie et étudier la parité de F.

b) Justifier que F est dérivable et calculer $F'(x)$.

c) Dresser le tableau de variations de F.

Exercice 15

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On pose $F(x) = \frac{1}{2x} \int_{-x}^x f(t)dt$.

a) Donner le domaine de définition de F. Montrer que F peut être prolongée par continuité en 0.

b) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $F'(x)$.

c) Montrer que F est dérivable en 0.

Suites définies par une intégrale

Exercice 16

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$.

a) Calculer I_0 et I_1.

b) Etablir une relation entre I_n et I_{n+1}.

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < I_n < \frac{e}{n+1}$.

d) Déterminer $\lim I_n$ puis un équivalent de I_n.

Exercice 17

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$.

a) Calculer u_0, u_1, u_2.

b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante.

c) Calculer $\lim_{n\to\infty} u_n$.

d) Etablir,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x^n} = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)dx.$$

e) En déduire que $u_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Sommes de Riemman

Exercice 18

Déterminer les limites des suites de terme général

a) $\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2}$,

b) $\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k^2}$,

c) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$,

d) $\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3+nk^2}$,

e) $\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 19

Déterminer un équivalent simple de $\sum_{k=1}^n \sqrt{k}$.