Développement décimal d'un nombre réel

O. Simon, Université de Rennes I

24 octobre 2006

Prérequis

- Les propriétés de $\mathbb{R}$ comme ensemble totalement ordonné et archimédien.
- La partie entière d'un nombre réel x, notée $E(x)$.
- La définition et les propriétés des nombres décimaux.

Rappel

Un nombre décimal d est un nombre rationnel qui s'écrit $\dfrac{a}{10^n}$ où a est dans $\mathbb{Z}$ et n dans $\mathbb{N}$. A partir de l'écriture en base 10 de tout entier naturel, on va donner une notation des nombres décimaux.
Soit $d = \dfrac{a}{10^n}$ avec $a > 0$. Dans l'écriture à base 10, $a = b_r 10^r + \ldots + b_1 10 + b_0$ avec $b_i \in \{0, \ldots, 9\}$ et $r \geq 0$, ainsi

$$d = \frac{b_r}{10^{n-r}} + \ldots + \frac{b_1}{10^{n-1}} + \frac{b_0}{10^n}$$

Si $r \geq n$, le nombre $\dfrac{b_r}{10^{n-r}} + \ldots + \dfrac{b_n}{10^{n-n}}$ est dans $\mathbb{N}$ et vaut $E(d)$. On note d_0 ce nombre entier, et $d_1 = b_{n_1}, \ldots, d_{n-1} = b_1, d_n = b_0$ les chiffres donnés par les n derniers coefficients de l'écriture en base 10, on définit la notation décimale avec virgule de d par

$$d = d_0, d_1 d_2 \ldots d_n$$

Si $r < n, n = r + k$, en considérant que $d = \underbrace{0 \times 10^n + \ldots + 0 \times 10^{r+1}}_{k\ termes} + b_r 10^r + \ldots + b_1 10 + b_0$, on

$$d = 0, \underbrace{0 \ldots 0}_{k-1} d_{k+1} \ldots d_n$$

Pour obtenir l'écriture d'un nombre décimal négatif, $d = \dfrac{a}{10^n}$ avec $a < 0$, on utilise l'écriture à base 10 de $-a$ et la cohérence des sommes multipliées par -1. On remarque que si a est négatif, $-d_0 = E(a) + 1$. On obtient une écriture de tout nombre décimal

$$d = \pm d_0, d_1 d_2 \ldots d_n$$

où $d_0 \in \mathbb{N}$ et $d_1, \ldots, d_n$ sont des entiers appartenant à $\{0, \ldots, 9\}$, ces n nombres correspondent aux n derniers chiffres du nombre $\pm a$ écrit en base 10.

1 Construction et définition pour un nombre réel positif

Le but est de construire deux suites adjacentes de nombres décimaux qui convergent vers le nombre réel considéré. Plus précisément,
soit x un nombre réel positif, on va construire par récurrence deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que, pour tout n,

$$u_n \leq x < v_n \text{ et } v_n - u_n = \frac{1}{10^n}$$

La propriété essentielle utilisée est la suivante : $\mathbb{R}$ est totalement ordonné et archimédien.
On a deux façons de formuler la construction de ces deux suites :

1. par analogie à la technique de division de deux entiers, on se ramène à l'intervalle $[0, 10[$.
2. avec l'idée topologique de découpage en intervalles de plus en plus petits, de longueur $\dfrac{1}{10^n}$

1.1 Par analogie à la technique de division de deux entiers

Initialisation. Construction de u_0 et v_0. Comme $\mathbb{R}$ est totalement ordonné et archimédien, il existe un et un seul entier a_0 tel que

$$a_0 \leq x < a_0 + 1$$

on a alors $x = a_0 + x_1$ avec $0 \leq x_1 < 1$.
On pose $u_0 = a_0$ et $v_0 = a_0 + 1$
Hérédité. On pose l'hypothèse de récurrence : on suppose que pour un certain entier n, on a construit deux nombres décimaux u_n et v_n définis par les entiers $a_0, a_1, \ldots, a_n$ où $a_1, \ldots, a_n$ appartiennent à $\{0, \ldots, 9\}$ tels que

$$u_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} \leq x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n + 1}{10^n} = v_n$$

on a alors $x = a_0 + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{x_{n+1}}{10^n}$ avec $0 \leq x_{n+1} < 1$.
Le nombre $10x_{n+1}$ est dans $[0, 10[$, donc il existe un unique entier $a_{n+1} \in \{0, \ldots, 9\}$ tel que

$$10x_{n+1} = a_{n+1} + x_{n+2} \text{ avec } 0 \leq x_{n+2} < 1$$

$$x_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{10} + \frac{x_{n+2}}{10} \text{ et } x = a_0 + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{x_{n+2}}{10^{n+1}}$$

On pose $u_{n+1} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}}$ et $v_{n+1} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{a_{n+1} + 1}{10^{n+1}}$
Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on sait construire deux nombres décimaux u_n et v_n définis par les entiers $a_0, a_1, \ldots, a_n$ où $a_1, \ldots, a_n$ appartiennent à $\{0, \ldots, 9\}$ tels que

$$u_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} \leq x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n + 1}{10^n} = v_n$$

1.2 Avec l'idée topologique de découpage en intervalles de plus en plus petits

Initialisation : construction de u_0 et v_0. Comme $\mathbb{R}$ est totalement ordonné et archimédien, il existe un et un seul entier a_0 tel que

$$a_0 \leq x < a_0 + 1$$

On pose $u_0 = a_0$ et $v_0 = a_0 + 1$
Hérédité. On pose l'hypothèse de récurrence : on suppose que pour un certain entier n, on a construit deux nombres décimaux u_n et v_n définis par les entiers $a_0, a_1, \ldots, a_n$ où $a_1, \ldots, a_n$ appartiennent à $\{0, \ldots, 9\}$ tels que

$$u_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} \leq x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n + 1}{10^n} = v_n$$

On a le découpage de $[u_n, v_n[$ en réunion disjointe de 10 intervalles de longueur égale :

$$[u_n, v_n[= \bigcup_{k=0}^{9} [u_n + \frac{k}{10^{n+1}}, u_n + \frac{k+1}{10^{n+1}}[$$

donc il existe un seul $k \in \{0, \ldots 9\}$ tel que $x \in [u_n + \frac{k}{10^{n+1}}, u_n + \frac{k+1}{10^{n+1}}[$, soit a_{n+1} ce nombre entier k.
On pose $u_{n+1} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}}$ et $v_{n+1} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{a_{n+1} + 1}{10^{n+1}}$
Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on sait construire deux nombres décimaux u_n et v_n définis par les entiers $a_0, a_1, \ldots, a_n$ où $a_1, \ldots, a_n$ appartiennent à $\{0, \ldots, 9\}$ tels que

$$u_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} \leq x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n + 1}{10^n} = v_n$$

Proposition 1.1 *Les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ construites ci-dessus sont deux suites adjacentes convergeant vers le nombre réel x considéré.*

Définition 1.2 *On appelle développement décimal d'un nombre réel x positif, la suite des nombres entiers $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ construite ci-dessus, définissant les deux suites adjacentes. On a $x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$ et on note $x = a_0, a_1 \ldots a_n \ldots$*
Cette suite est unique, par construction.
Pour $n \geq 1$, le chiffre a_n est appelé la $n^{\text{ème}}$ décimale du réel x.

Si x est un nombre réel négatif, on considère $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, le développement décimal de $-x$, comme $-x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$, on a

$$x = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} = \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{a_k}{10^k}$$

On note $x = -a_0, a_1 \dots a_n \dots$.

Proposition 1.3 *Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers où $a_1, \dots, a_n$ appartiennent à $\{0, \dots, 9\}$ est le développement décimal, ainsi défini, d'un nombre réel si et seulement si elle n'est pas constante à "9" à partir d'un certain rang.*

Ceci signifie qu'étant donné un développement décimal $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $n > p$ tel que $a_n \neq 9$.
La démonstration se fait par l'absurde, en utilisant les intervalles semi-ouverts à droite.

Proposition 1.4 *Si $x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{10^k}$ tel qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ avec $b_p \neq 9$ et pour tout $n > p, b_n = 9$ alors le développement décimal de x est $x = a_0, a_1 \dots a_p \dots = a_0, a_1 \dots a_p$, avec pour $0 \leq n < p$, $a_n = b_n$, $a_p = b_p + 1$ et pour $n > p$, $an = 0$.*

Pour le démontrer, on peut utiliser la somme de la série géométrique de terme général $\frac{1}{10^n}$ égale à $\frac{10}{9}$.
Exemples : $x_1 = 0,99999..... = 1$, $x_2 = 12,3334569999999..... = 12,333457$

Proposition 1.5 *Si $x = \frac{a}{b}, a, b$ dans $\mathbb{Z}$, pour obtenir le développement décimal, on effectue la division de a par b, avec chiffres après la virgule.*

Remarque Dans la construction des suites précédentes, on a pour chaque n :

$$10^n u_n \leq 10^n x < 10^n v_n = 10^n u_n + 1$$

donc, $10^n u_n = E(10^n x)$ ainsi on trouve des expressions de u_n et de v_n, non évidentes :

$$u_n = \frac{E(10^n x)}{10^n} \text{ et } v_n = \frac{E(10^n x + 1)}{10^n}$$

2 Applications

Question Comment obtient-on les développement décimal de $\frac{1}{7}$, $\sqrt{2}$, π... ?

Proposition 2.1 *Caractérisation des nombres*
- *Un nombre réel est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang.*
- *Un nombre rationnel est décimal si et seulement si son développement décimal est fini,*
- *Un nombre rationnel est décimal si et seulement si il s'écrit $\frac{p}{q}$ avec $q = 2^k 5^l,\ k, l \in \mathbb{N}$*

- Si $x = \frac{a}{b}, a, b$ dans $\mathbb{Z}$, pour obtenir le développement décimal, on effectue la division de a par b, avec chiffres après la virgule. Ayant fait la division euclidienne de a par b, on obtient la partie entière q_1 :

$$a = bq_1 + r_1$$

la division de $10r_1$ par b donne la première décimale d_1, avec un reste $r_2,\ 0 \leq r_2 < b$:

$$10r_1 = bd_1 + r_2,$$

et ainsi de suite, la division de $10r_k$ par b donne la $k^{\text{ème}}$ décimale. Comme on a un nombre fini de restes, il existe $i \neq j$ avec $r_i = r_j$, d'après l'unicité de la division euclidienne $d_i = d_j$, on voit apparaître la périodicité.
Exemples : $\frac{9}{14} = 0,6428571428571...$, on a une période de longueur 6

$\frac{40}{17} = 2,35294117647058823529411764705882....$, on a une période de longueur 16, tous les restes non nuls sont utilisés.
$\frac{1}{17} = 0,058823529411761176...$, on a une période de longueur 4, 14 restes sont utilisés, on a $r_{11} = r_{15} = 2$.

– On démontre qu'un nombre rationnel est décimal si et seulement si il s'écrit $\frac{p}{q}$ avec $q = 2^k 5^l,\ k, l \in \mathbb{N}$, en utilisant le théorème de Gauss.

Exercice : Ecrire sous forme de fraction les nombres rationnels ayant les développements décimaux suivants :

* $a = 0,55555...$ (réponse $10a - a = 5$, d'où $a = \frac{5}{9}$)
* $b = 12,123123123...$ (réponse $1000b - b = 12111$, d'où $b = \frac{12111}{999} = \frac{4037}{333}$)

Proposition 2.2 *L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.*

Pour montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, on fait un raisonnement par l'absurde :
supposons qu'il y ait une bijection f de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{R}$, tous les éléments de $\mathbb{R}$ sont atteints, $\mathbb{R} = \{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$
$\mathbb{R}$ peut s'écrire comme une suite.
On construit un nombre réel x qui n'est pas dans cette suite, en donnant son développement décimal :
$x = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_i \ldots$ avec a_0 entier et a_i entre 0 et 9, les a_i étant définis ainsi, pour $i \in \mathbb{N}$

– si la $i^{\text{ème}}$ décimale ou la partie entière de $f(i)$ est 0 alors a_i est égale à 1
– si la $i^{\text{ème}}$ décimale ou la partie entière de $f(i)$ est différente de 0 alors a_i est égale à 0.

Ce nombre x n'est égal à aucun des $f(n)$, donc f n'est pas surjective.

Cette construction s'appelle procédé diagonal.