Université Rennes 1
Préparation au Capes

Probabilités élémentaires et variables aléatoires

Exercice 1 *Test de dépistage*

Une grave maladie affecte le cheptel bovin d'un certain pays. On estime que 7% des bovins sont atteints.

On vient de mettre un test pour diagnotisquer la maladie et on a établi que :

- quand un animal est malade, le test est positif dans 87% des cas,
- quand un animal n'est pas malade, le test est négatif dans 98% des cas,

Un animal est pris au hasard dans le cheptel bovin de ce pays. On veut calculer la probabilité que l'animal soit malade sachant qu'il a un test positif.

Exercice 2 *Tel père, tel fils ?*

Lors d'une enquête réalisée auprès d'élèves de classes de terminale, on apprend que 60% des élèves sont des filles. De plus 40% des filles et 30% des garçons fument.

a) On note A l'événement "l'élève choisi fume". Calculer P(A).

b) L'enquête permet de savoir que

- parmi les élèves fumeurs, la moitié ont des parents qui fument,
- parmi les élèves non fumeurs, 65% ont des parents non fumeurs.

On note B l'événement "l'élève choisi a des parents fumeurs". Calculer la probabilité qu'un élève fume sachant qu'il a des parents non fumeurs.

Exercice 3 *Formule de poincaré, problème des rencontres*

a) Montrer que si $A_1, \ldots, A_n$ sont n événements et si A désigne la réunion de ces n événements, on a

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} s_k, \quad s_k = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}).$$

b) On tire sans remise n boules numérotées de 1 à n. Déterminer la probabilité pour qu'il existe un entier p tel que la boule portant le numéro p soit tirée au $p^{\text{ème}}$ tirage.

c) Déterminer la limite de cette probabilité quand n tend vers l'infini.

Exercice 4 *Loi Hypergéométrique*

Un lac contient n poissons. On en pêche n_1 qu'on marque et qu'on remet à l'eau. On pêche à nouveau r poissons. Soit X le nombre de poissons marqués parmi ces r poissons. Calculer $P(X = k)$, la probabilité pour que X soit égal à k.

Exercice 5

On jette 5 dés. Après le premier lancer, on reprend et on lance les dés qui n'ont pas donné de six. On continue ainsi jusqu'à ce que l'on obtienne 5 six. Soit X le nombre de lancers nécessaires.

a) Donner la fonction de répartition de X. En déduire $P(X = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Combien de lancers sont nécessaires en moyenne pour obtenir les 5 six ?

Exercice 6

La citerne d'essence d'une station service est remplie chaque lundi matin. La vente hebdomadaire d'essence, en milliers de litres, réalisée par cette station service est une v.a. absolument continue de densité :

$$f(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Quelle doit être la capacité minimale de la citerne pour que la probabilité que la station service soit à court d'essence au court d'une semaine donnée soit inférieure à 0,01 ?

Exercice 7 *Transformation de loi*

a) Soit U une v.a. de loi uniforme sur [0,1]. Quelle est la loi de $V = e^U$? Calculer U et V.

b) Soit W une v.a. de loi uniforme sur [-1,1]. Quelle est la loi de $Z = |W|$? Calculer W et Z.

Exercice 8 *Pluviométrie à Brest*

Soit X une v.a. de densité f définie par $f(x) = 0$ si $x < 0$ et $f(x) = xe^{-x^2/2}$ sinon.

a) Vérifier que f est une densité de probabilité.

b) Trouver la loi de $Y = X^2$.

c) Calculer l'espérance et la variance de Y.

d) On s'intéresse aux précipitations à Brest. On suppose que la durée (en heure) T entre deux précipitations vérifie la relation $T = \lambda Y$, où λ est une constante.. En consultant les relevés météos, on se rend compte qu'il s'écoule au moins 24h consécutives sans pluie avec une probabilité 0.09.
   a) Déterminer λ.
   b) Combien de temps s'écoule-t-il en moyenne entre deux averses ?
   c) Il est midi. La pluie vient de s'arrêter. Quelle est la probabilité qu'il pleuve avant 14h ?