Université Rennes 1.
Préparation au capes

THÉORÈMES LIMITES

Exercice 1 *Loi Hypergéométrique*

On considère une v.a. X de loi Hypergéométrique H(N,n,m):

$$P(X=k) = \frac{\begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N-m \\ n-k \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}} \qquad \text{avec } k \in \{0,1,..,\min(n,m)\}$$

On suppose que $\frac{m}{N} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} p \in]0,1[$. Étudier le comportement de la loi de X lorsque $m \to +\infty$.

Exercice 2 *Loi Binomiale*

Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. de loi binomiale de paramètres (n, p_n). On suppose que $n \to +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda > 0$. Etudier le comportement en loi de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand $n \to +\infty$.
Cette approximation est utile quand n est grand car le calcul numérique des C_n^k est peu efficace.

Exercice 3 *Loi de Poisson*

a) Soient X_i des variables aléatoires indépendantes et de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Quelle est la loi de $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$?
b) Quelle est le comportement en loi de S_n lorsque $n \to +\infty$?

Exercice 4

Combien de fois faut-il lancer une pièce bien équilibrée pour que la moyenne du nombre de piles obtenu soit dans l'intervalle $[1/2 - 0.01, 1/2 + 0.01]$ avec une probabilité supérieure ou égale à 0.96? On déterminera un tel nombre de deux façons:

a) en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev;
b) par approximation par la loi normale.

Exercice 5

Un central téléphonique est construit pour 5000 abonnés.
Chaque jour, les abonnés téléphonent à l'heure de pointe avec une probabilité égale à 0.02.

Quelle capacité le central téléphonique doit-il avoir pour pouvoir transmettre des communications indépendantes pendant un an sans être saturé avec une probabilité supérieure ou égale à 0.9 ?

Exercice 6

Une compagnie aérienne gère des vols de 200 passagers avec les données suivantes:

- le poids en kilogrammes d'un passager est une v.a.r. d'espérance 65 et d'écart type 15;
- quand le poids maximal de bagages autorisé par passager est de Mkg, le poids de bagages par passager en kilogrammes est une v.a.r. d'espérance $0.7M$ et d'écart type $0.2M$;
- les 400 v.a.r. "poids des passagers" et "poids des bagages" sont indépendantes.

Quelle valeur de M maximale permet d'avoir 95 chances sur 100 de faire rentrer 200 passagers dans l'avion sans dépasser la charge maximale autorisée, égale à 18 tonnes ?

Exercice 7

Un restaurateur peut servir 75 repas, uniquement sur réservation. La pratique montre que 20% des clients ayant réservés ne viennent pas.
Combien le restaurateur doit-il accepter de réservations indépendantes pour avoir une probabilité supérieure ou égale à 0.9 de pouvoir servir tous les clients qui se présenteront ?

Exercice 8

Une compagnie d'assurance se propose d'assurer 100000 clients contre le vol. Les sommes en euros (la plupart du temps nulles) $X_1, \dots, X_{100000}$ qu'aura à rembourser chaque année la compagnie aux clients sont des v.a. indépendantes d'espérance 75 et d'écart type 750.
Quelle somme cette compagnie d'assurance doit-elle faire payer à chaque client par an pour que ses frais évalués à $1,5$ millions d'euros soient couverts avec une probabilité supérieure ou égale à 0.999? (On utilisera sans justification l'approximation par la loi Normale.)