

## Estimation, Intervalles de Confiance et Tests

### Quelques calculs d'intervalles de confiance

#### Exercice 1

a) On considère  $X_1, \dots, X_n$  un échantillon de loi  $\mathcal{B}(p)$ , avec  $p \in ]0, 1[$  inconnu. Trouver un intervalle de confiance à 95% de  $p$ .

Application : Lors d'une enquête d'opinion, on a dénombré 81 personnes satisfaites d'un produit sur 1681 interrogées. En admettant que les personnes de l'échantillon ont été prises au hasard dans une grande population, donner l'intervalle de confiance de la proportion  $p$  de personnes satisfaites dans la population totale, avec une probabilité de confiance de 0.95.

b) On considère  $X_1, \dots, X_n$  un échantillon de loi  $\mathcal{E}(\lambda)$ , avec  $\lambda > 0$  inconnu. Trouver un intervalle de confiance à 95% de  $\lambda$ .

#### Exercice 2

On observe un échantillon  $X_1, \dots, X_n$  de loi de densité  $h_\theta(x) = \frac{2x}{\theta^2} \mathbb{I}_{[0, \theta]}(x)$ .

On suppose  $n$  grand et  $\theta \in ]0, 2]$ .

Donner un intervalle de confiance pour  $\theta$  à 95% à partir de  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ .

#### Exercice 3

Soit  $X_1, \dots, X_n$  un échantillon de loi de densité  $p_\theta$

$$p_\theta(x) = (2\theta x - \theta + 1) \mathbb{I}_{[0, 1]}(x)$$

où  $\theta$  est un paramètre appartenant à  $[-1, 1]$ .

On se propose d'estimer le paramètre  $\theta$ .

a) Montrer que l'espérance de l'estimateur  $T = \alpha \bar{X} + \beta$  vaut  $\theta$  pour  $\alpha$  et  $\beta$  convenablement choisis.

b) Quelle est la limite en probabilité de  $T$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$  ?

c) Soit  $a > 0$ . Quel est la limite de  $P(\sqrt{n}|T - \theta| < a)$  quand  $n \rightarrow +\infty$  ?

En déduire un intervalle de confiance de niveau 0.99 pour  $\theta$ .

### Quelques exemples de tests

#### Exercice 4

Douze adultes francophones "d'intelligence moyenne" ont fait l'objet d'une expérience de mémoire. Le temps pris pour apprendre une liste de 5 verbes allemands a été enregistré pour chaque personne. Ceci a donné les résultats suivants (en minute):

5.1	4.8	6.3	5.0	5.5	5.0	5.2	4.9	4.5	5.8	5.3	5.2
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

a) Calculer la moyenne et l'écart type de l'échantillon

b) Établir un intervalle de confiance ( $\alpha = 5\%$ ) du temps moyen nécessaire à un francophone pour apprendre la liste des 5 verbes allemands.

c) On dit qu'un francophone ne peut apprendre qu'un verbe par minute. Est-ce que cette affirmation est justifiée par le résultat obtenu dans la question précédente ?

### Exercice 5

Dans une fabrique de compteurs électriques, on vérifie le réglage des compteurs sur un échantillon de 10 compteurs. Lors d'une mesure de 100 unités, les compteurs de l'échantillon enregistrent:

983, 1002, 998, 996, 1002, 983, 994, 991, 1005, 986.

On suppose l'échantillon de loi  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ .

- Donner un intervalle de confiance au niveau 0.95 pour la moyenne.
- Tester l'hypothèse  $m = 1000$  contre  $m \neq 1000$  au niveau 0.05.

### Exercice 6

On se demande si la sensibilité aux intoxications professionnelles est identique pour les populations urbaine et rurale. Les observations sur deux échantillons ont montré :

123 personnes sensibles sur 276 en milieu urbain

145 personnes sensibles sur 295 en milieu rural

La différence est-elle significative au niveau  $\alpha = 0.05$  ?  $\alpha = 0.1$  ? Conclusion.

### Exercice 7

On désire tester l'effet d'une cure d'amaigrissement suivie par 100 patients.

On mesure le poids  $x_i$  (en kg) du patient  $i$  avant traitement, puis son poids  $y_i$  après le traitement.

On obtient les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \bar{x}_{100} &= 77.11 \text{ kg}, & \bar{y}_{100} &= 667.4 \text{ kg} \\ \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} x_i^2 &= 6055.47 & \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} y_i^2 &= 4588.62 & \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} x_i y_i &= 5243.45 \end{aligned}$$

- Peut-on considérer à un niveau de risque de 0.05 que la cure d'amaigrissement a eu un effet en moyenne ?
- Donner le coefficient de corrélation des  $x_i$  et des  $y_i$ . Calculer la droite de régression affine de  $Y$  sur  $X$ .
- Quel poids peut-on prévoir pour un individu de 84kg qui suivrait la cure en question ?