Préparation au CAPES de Mathématiques

Corrigé rapide du problème d'algèbre n°1

Partie 1 : Valuation p-adique

1) Si $x = \dfrac{c}{d}$, on écrit $c = p^{k_1}a$ où $a \wedge p = 1$ et $d = p^{k_2}b$, avec $b \wedge p = 1$. On a donc $x = p^{k_1-k_2}\dfrac{a}{b}$. Pour l'unicité, si l'on a $x = p^k\dfrac{a}{b} = p^\ell\dfrac{a'}{b'}$, alors $p^k ab' = p^\ell a'b$, et donc $p^k | p^\ell a'b$. Mais $p \wedge a'b = 1$ (un nombre premier est premier avec tout nombre qu'il ne divise pas donc aussi avec tout produit de tels nombres) et le théorème de Gauss assure que $p^k | p^\ell$, ou encore que $k \leq \ell$. De même, on montre que $\ell \leq k$, et donc $k = \ell$.

2) On a $v_p(1) = 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}^*$, $v_p(p^k) = k$, et $v_p(0) = +\infty$. Ceci garantit que v_p est surjective.

v_p n'est par contre pas injective puisque par exemple $v_p(p) = v_p(-p) = 1$. Enfin, $v_p^{-1}(\{0\})$ est l'ensemble des rationnels qui s'écrivent $\dfrac{a}{b}$ avec a et b entiers premiers avec p.

3) Soient x et y dans $\mathbb{Q}$.

a) Si $x = p^k\dfrac{a}{b}$ et $y = p^\ell\dfrac{c}{d}$, on a : $v_p(xy) = v_p\left(p^{k+\ell}\dfrac{ac}{bd}\right) = k + \ell$ puisque ac et bd sont premiers avec p. D'où $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$. Cette relation reste vérifiée si x et/ou y est nul.

b) La relation proposée est claire si x ou y est nul.

Ecrivons $x = p^k\dfrac{a}{b}$ et $y = p^\ell\dfrac{c}{d}$ avec par exemple $k \geq \ell$. On a : $x + y = p^\ell\left(\dfrac{p^{k-\ell}ad + cb}{bd}\right)$. Maintenant, comme $bd \wedge p = 1$, on a $v_p\left(\dfrac{1}{bd}\right) = 0$. Puisque $k \geq \ell$, on a $p^{k-\ell}ad + cb \in \mathbb{Z}$ et $v_p(p^{k-\ell}ad + cb) \geq 0$. On en déduit que $v_p(x + y) \geq \ell = \min\{v_p(x), v_p(y)\}$.

On a $v_p(p + (p-1)p) = v_p(p^2) = 2$ et $v_p(p) = v_p((p-1)p) = 1$. L'inégalité proposée peut donc bien être stricte.

c) On a $v_p(\dfrac{x}{y}) = v_p\left(\dfrac{x}{1} \times \dfrac{1}{y}\right) = v_p(x) + v_p(\dfrac{1}{y}) = v_p(x) - v_p(y)$.

Partie 2 : Formule de Legendre

1) Notons $F_k = \{1 \leq j \leq n,\ v_p(j) \geq k\}$. Soit $j \in \mathbb{N}$. $j \in F_k$ si et seulement si $1 \leq j \leq n$ et $j = p^k a$ où a est un entier c'est à dire si et seulement si il existe un entier a tel que $j = p^k a$ et $\dfrac{1}{p^k} \leq a \leq \dfrac{n}{p^k}$. Par suite, $\mathrm{Card}(F_k) = \left[\dfrac{n}{p^k}\right]$. D'autre part, $\{j \in \mathbb{N},\ 1 \leq j \leq n,\ v_p(j) = k\} = F_k \backslash F_{k+1}$, et comme F_{k+1} est inclus dans F_k, le cardinal de cet ensemble vaut $\left[\dfrac{n}{p^k}\right] - \left[\dfrac{n}{p^{k+1}}\right]$.

2) On a $v_p(n!) = v_p(1) + \cdots + v_p(n)$, que l'on réécrit en regroupant les termes qui ont même valuation p-adique : $v_p(n!) = \displaystyle\sum_{k>0} k\mathrm{Card}\left(\{1 \leq j \leq n,\ v_p(j) = k\}\right) = \sum_{k>0} k\left(\left[\frac{n}{p^k}\right] - \left[\frac{n}{p^{k+1}}\right]\right)$. Finalement, par un simple changement d'indice, $v_p(n!) = \displaystyle\sum_{k>0}\left[\frac{n}{p^k}\right]$.

3) Ce qui précède montre que $v_5(2009!) = 401 + 80 + 16 + 3 = 500$ et comme il est clair que $v_2(2009!) > 500$, on a $2009! = 10^{500}y$ avec $y \wedge 5 = 1$ et par suite $2009!$ se termine par 500 "0".