Préparation au CAPES de Mathématiques

Problème d'algèbre n°1

A rendre pour le jeudi 24 septembre 2009

Dans tout le problème, p est un nombre premier fixé.

Partie 1 : Valuation p-adique

1) Montrer que, pour tout rationnel non nul x, il existe un unique entier relatif k tel que x s'écrive sous la forme $x = p^k \dfrac{a}{b}$ où a et b sont des entiers non multiples de p.

Cet entier k est noté $v_p(x)$ et appelé *valuation p-adique* de x. On pose de plus $v_p(0) = +\infty$. On définit ainsi une application v_p de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$.

On adopte les conventions usuelles $k+(+\infty) = (+\infty)+k = +\infty$ et $k \leq +\infty$ pour tout k de $\mathbb{Z}\cup\{+\infty\}$.

2) Montrer que l'application v_p est surjective. Est-elle bijective ? Décrire $v_p^{-1}(\{0\})$.

3) Soient x et y dans $\mathbb{Q}$.

a) Montrer que $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$.

b) Montrer que $v_p(x + y) \geq \min\{v_p(x), v_p(y)\}$. Donner un exemple où l'inégalité est stricte.

c) On suppose $y \neq 0$. Exprimer $v_p(\dfrac{x}{y})$ en fonction de $v_p(x)$ et $v_p(y)$.

Partie 2 : Formule de Legendre

1) Montrer que, pour (k, n) dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, le cardinal de l'ensemble $\{j \in \mathbb{N},\ 1 \leq j \leq n,\ v_p(j) = k\}$ est égal à $\left[\dfrac{n}{p^k}\right] - \left[\dfrac{n}{p^{k+1}}\right]$ où $[x]$ désigne la partie entière du réel x.

2) Démontrer que $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ v_p(n!) = \displaystyle\sum_{k>0} \left[\frac{n}{p^k}\right] \quad$ *(formule de Legendre)*

3) Par combien de "0" se termine l'écriture décimale du nombre 2009! ?