UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et Géométrie 1

Corrigé rapide de l'exercice à rendre pour le 26 septembre 2017

Exercice

1) $\mathscr{E}(a,b,c)$ est une partie non vide (car contenant la suite nulle) du $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites complexes. Si u et v sont deux suites de $\mathscr{E}(a,b,c)$ et λ et μ deux complexes alors, pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a(\lambda u+\mu v)_{n+2}+b(\lambda u+\mu v)_{n+1}+c(\lambda u+\mu v)_n &= a(\lambda u_{n+2}+\mu v_{n+2})+b(\lambda u_{n+1}+\mu v_{n+1})+c(\lambda u_n+\mu v_n) \\ &= \lambda(au_{n+2}+bu_{n+1}+cu \end{aligned}$$

Comme $\mathscr{E}(a,b,c)$ est de dimension 2, on en déduit que $\left((r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ est une base de $\mathscr{E}(a,b,c)$.

• Si $b^2 - 4ac = 0$, soit r la racine double du polynôme caractéristique.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a(n+2)r^{n+2} + b(n+1)r^{n+1} + cnr^n = r^n\left(n(ar^2+br+c) + 2ar^2 + br\right) = 0$$

puisque $r = -\frac{b}{2a}$. Les suites $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(nr^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc dans $\mathscr{E}(a,b,c)$. Or,

$$\begin{aligned}\lambda(r^n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu(nr^n)_{n\in\mathbb{N}} = (0)_{n\in\mathbb{N}} &\implies \left\{\begin{array}{ll}\lambda = 0 & (n=0)\\ \lambda r + \mu r = 0 & (n=1)\end{array}\right.\\ &\implies \lambda = \mu = 0\end{aligned}$$

Les suites $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(nr^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment donc une famille libre donc une base de $\mathscr{E}(a,b,c)$.

5) L'équation caractéristique correspondant à la suite de Fibonacci est $r^2 = r + 1$ qui admet deux racines réelles distinctes $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. 4)a) prouve alors l'existence de deux éléments α et β de $\mathbb{C}$ tels que pour tout n de $\mathbb{N}$ $u_n = \alpha\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Les valeurs de u_0 et u_1 conduisent à $\alpha + \beta = 0$ et $\alpha(1+\sqrt{5}) + \beta(1-\sqrt{5}) = 2$ et finalement : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{\sqrt{5}}{5}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \dfrac{\sqrt{5}}{5}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.