UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et Géométrie 1

Problème à rendre pour le 26 septembre 2017

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que $a \neq 0$. On note $\mathscr{E}(a, b, c)$ l'ensemble des suites complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$$

1) Montrer que $\mathscr{E}(a, b, c)$ est un espace vectoriel.

2) Montrer pour tout x et tout y de $\mathbb{C}$, il existe un unique élément $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{E}(a, b, c)$ tel que $u_0 = x$ et $u_1 = y$. On note $F(x, y)$ cet élément.

3) Montrer que que l'application $F : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathscr{E}(a, b, c)$, $(x, y) \longmapsto F(x, y)$ est un isomorphisme de $\mathbb{C}^2$ sur $\mathscr{E}(a, b, c)$. En déduire la dimension de l'espace vectoriel $\mathscr{E}(a, b, c)$.

4) Soit $r \in \mathbb{C}^*$. Montrer que la suite $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de $\mathscr{E}(a, b, c)$ si et seulement si r est solution de *l'équation caractéristique* $(C) : ax^2 + bx + c = 0$.

a) On suppose que l'équation (C) admet deux racines distinctes r_1 et r_2 dans $\mathbb{C}$. Montrer que les deux suites $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de $\mathscr{E}(a, b, c)$.

b) On suppose que l'équation (C) admet une racine double r non nulle. Montrer que les deux suites $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(nr^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de $\mathscr{E}(a, b, c)$.

5) On considère la suite de Fibonacci $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0 \quad u_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Pour tout entier naturel n, expliciter u_n en fonction de n.