PRA1 - Analyse et Probabilités

Corrigé rapide de l'exercice à rendre pour le 22 septembre 2015

1) Par hypothèse, $\exists A, B \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ A \leqslant u_n \leqslant B$. Par suite, $\forall p \in \mathbb{N},\ A \leqslant A_p \leqslant B$ et $A \leqslant B_p \leqslant B$. Les suites (A_p) et (B_p) sont donc bornées.
Soit $p \in \mathbb{N}$. On a $\{u_n,\ n > p+1\} \subseteq \{u_n,\ n > p\}$ donc $A_{p+1} \leqslant A_p$ et la suite (A_p) est décroissante. De même, la suite (B_p) est croissante.

2)
a) Notons tout d'abord que $\forall n,\ |u_n| \leqslant 2$ donc la suite (u_n) est bien bornée.

– Montrons que $L = 1$. Soit $\varepsilon > 0$. $\dfrac{n+2}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ donc $\exists P \in \mathbb{N},\ \forall p > P,\ \forall n > p,\ u_n \leqslant \dfrac{n+2}{n+1} \leqslant 1 + \varepsilon$ et donc en particulier, $\forall p > P,\ A_p \leqslant 1 + \varepsilon$.
D'autre part, pour $p > P$, $\exists k \in \mathbb{N},\ n = 6k > p$. Comme $u_{6k} = \dfrac{6k+2}{6k+1} > 1$, on a $\exists n > p,\ u_n > 1$ et par suite, $A_p > 1$.
Finalement, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists P \in \mathbb{N},\ \forall p > P,\ |A_p - 1| < \varepsilon$.

– Montrons que $\ell = -1$. Soit $\varepsilon > 0$. $-\dfrac{n+2}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$ donc :
$\exists P \in \mathbb{N},\ \forall p > P,\ \forall n > p,\ u_n \geqslant -\dfrac{n+2}{n+1} \geqslant -1 - \varepsilon$ et donc en particulier, $\forall p > P,\ B_p \geqslant -1 - \varepsilon$.
D'autre part, pour $p > P$, $\exists k \in \mathbb{N},\ n = 6k+3 > p$. Comme $u_{6k+3} = -\dfrac{6k+5}{6k+4} < -1$, on a $\exists n > p,\ u_n < -1$ et par suite, $B_p < -1$.
Finalement, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists P \in \mathbb{N},\ \forall p > P,\ |B_p + 1| < \varepsilon$.

b) Soit $\varepsilon > 0$.

– Comme $\lim\limits_{p\to\infty} B_p = \ell$, $\exists P \in \mathbb{N},\ p \geqslant P \Rightarrow B_p > \ell - \varepsilon$.
Mais alors, $\forall n \geqslant P+1,\ u_n \geqslant \text{Inf}\ \{u_n | n > P\} = B_P > \ell - \varepsilon$.

– (B_p) est croissante et converge vers ℓ donc $\forall p \in \mathbb{N},\ B_p < \ell + \varepsilon$. Par suite, $\ell + \varepsilon$ n'est pas un minorant de $\{u_n | n > p\}$ donc $\exists n > p,\ u_n < \ell + \varepsilon$.

c) Soit de même $\varepsilon > 0$.

– Comme $\lim\limits_{p\to\infty} A_p = L$, $\exists P \in \mathbb{N},\ p \geqslant P \Rightarrow A_p < L + \varepsilon$.
Mais alors, $\forall n \geqslant P+1,\ u_n \leqslant \text{Sup}\ \{u_n | n > P\} = A_P < L + \varepsilon$.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant p, u_n < L + \varepsilon$$

– (A_p) est décroissante et converge vers L donc $\forall p \in \mathbb{N},\ A_p > L - \varepsilon$. Par suite, $L - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $\{u_n | n > p\}$ donc $\exists n > p,\ u_n > L - \varepsilon$.

$$\forall \varepsilon > 0, \forall p \in N, \exists n \geqslant p, u_n > L - \varepsilon$$

3) Si $L = \ell$, on peut déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists P_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant P_1,\ u_n > \ell - \varepsilon$ et $\exists P_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant P_2,\ u_n < \ell + \varepsilon$. Par suite, $n \geqslant \text{ Max } \{P_1, P_2\} \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$. La suite $(u\pounds_n)$ converge donc vers ℓ.