PRA1 : Analyse et Probabilités

Exercice à rendre pour le 22 septembre 2015

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. On pose $A_p = \text{Sup } \{u_n | n > p\}$ et $B_p = \text{Inf } \{u_n | n > p\}$.

1) Montrer que la suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante et bornée et que la suite $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante et bornée.

2) On note respectivement L et ℓ les limites de $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$.

a) Dans le cas particulier où $u_n = \dfrac{n+2}{n+1}\cos(\dfrac{n\pi}{3})$, calculer L et ℓ.

b) Montrer que : $\forall\varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant p, u_n > \ell - \varepsilon$ puis que : $\forall\varepsilon > 0, \forall p \in N, \exists n \geqslant p, u_n < \ell + \varepsilon$. Interpréter ces propriétés.

c) Enoncer des propriétés analogues pour L. Prouver les.

3) Que peut-on dire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $L = \ell$?

Université de Rennes 1

Master 1 MEEF - Parcours Mathématiques

PRA1 : Analyse et Probabilités

Exercice à rendre pour le 22 septembre 2015

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. On pose $A_p = \text{Sup } \{u_n | n > p\}$ et $B_p = \text{Inf } \{u_n | n > p\}$.

1) Montrer que la suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante et bornée et que la suite $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante et bornée.

2) On note respectivement L et ℓ les limites de $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$.

a) Dans le cas particulier où $u_n = \dfrac{n+2}{n+1}\cos(\dfrac{n\pi}{3})$, calculer L et ℓ.

b) Montrer que : $\forall\varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant p, u_n > \ell - \varepsilon$ puis que : $\forall\varepsilon > 0, \forall p \in N, \exists n \geqslant p, u_n < \ell + \varepsilon$. Interpréter ces propriétés.

c) Enoncer des propriétés analogues pour L. Prouver les.

3) Que peut-on dire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $L = \ell$?