Université de Rennes

PRA1 - Probabilités

Corrigé détaillé de l'exercice à rendre pour le 27 octobre 2023

1) On sait que si A et B sont deux évènements alors $\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$.
Soit alors A_1, A_2 et A_3 trois éléments de $\mathscr{P}(\Omega)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1\cup A_2\cup A_3) &= \mathbb{P}((A_1\cup A_2)\cup A_3)\\ &= \mathbb{P}(A_1\cup A_2)+\mathbb{P}(A_3)-\mathbb{P}(A_3\cap(A_1\cup A_2))\\ &= \mathbb{P}(A_1)+\mathbb{P}(A_2)-\mathbb{P}(A_1\cap A_2)+\mathbb{P}(A_3)-\mathbb{P}((A_3\cap A_1)\cup(A_3\cap A_2))\\ &= \mathbb{P}(A_1)+\mathbb{P}(A_2)+\mathbb{P}(A_3)-\mathbb{P}(A_1\cap A_2)-\left[\mathbb{P}(A_3\cap A_1)+\mathbb{P}(A_3\cap A_2)-\mathbb{P}(A_3\cap A_1\cap A_2)\right].\end{aligned}$$

La formule annoncée en découle.

2) Par récurrence. Pour $n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, notons $\mathscr{P}_n$ la propriété : « pour toute famille $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ d'évènements,
$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)=\sum_{i=1}^n P(A_i)+\cdots+(-1)^{k+1}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}\mathbb{P}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k})+\cdots+(-1)^{n+1}P(A_1\cap\cdots\cap A_n)$ »

- *(initialisation)* Pour deux évènements A_1 et A_2 on a $\mathbb{P}(A_1\cup A_2)=\mathbb{P}(A_1)+\mathbb{P}(A_2)-\mathbb{P}(A_1\cap A_2)$ donc $\mathscr{P}_2$ est vraie.
- *(hérédité)* Soit $n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ fixé. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie et montrons qu'alors $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. Soit $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ une famille d'évènements. D'après $\mathscr{P}_2$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1}A_i\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\cup A_{n+1}\right)=\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)+\mathbb{P}(A_{n+1})-\mathbb{P}\left((\bigcup_{i=1}^{n}A_i)\cap A_{n+1}\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)+\mathbb{P}(A_{n+1})-\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}(A_i\cap A_{n+1})\right)\ \text{par distributivité de } \cap \text{ par rapport à } \cup\end{aligned}$$

On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence sur le premier et le troisième terme du second membre.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1}A_i\right) &= \sum_{i=1}^n\mathbb{P}(A_i)+\cdots+(-1)^{k+1}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}\mathbb{P}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k})+\cdots+(-1)^{n+1}\mathbb{P}(A_1\cap\cdots\cap A_n)\\ &+\mathbb{P}(A_{n+1})-\sum_{i=1}^n\mathbb{P}(A_i\cap A_{n+1})-\cdots-(-1)^{k+1}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}\mathbb{P}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\cap A_{n+1})-\dots\\ &-(-1)^{n+1}\mathbb{P}(A_1\cap\cdots\cap A_n\cap A_{n+1})\end{aligned}$$

On effectue un changement d'indice ($k'=k+1$) dans la seconde somme :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1}A_i\right) &= \sum_{i=1}^n\mathbb{P}(A_i)+\cdots+(-1)^{k+1}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}\mathbb{P}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k})+\cdots+(-1)^{n+1}\mathbb{P}(A_1\cap\cdots\cap A_n)\\ &+\mathbb{P}(A_{n+1})-\sum_{i=1}^n\mathbb{P}(A_i\cap A_{n+1})+\cdots+(-1)^{k'+1}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_{k'-1}\leqslant n}\mathbb{P}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_{k'-1}}\cap A_{n+1})+\dots\\ &+(-1)^{n+2}\mathbb{P}(A_1\cap\cdots\cap A_n\cap A_{n+1})\\ &= \sum_{i=1}^{n+1}\mathbb{P}(A_i)+\cdots+(-1)^{k+1}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}\mathbb{P}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k})+\cdots+(-1)^{n+1}\mathbb{P}(A_1\cap\cdots\cap A_n)\\ &-\sum_{1\leqslant i_1\leqslant n\text{ et }i_2=n+1}\mathbb{P}(A_{i_1}\cap A_{i_2})+\cdots+(-1)^{k+1}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_{k-1}\leqslant n\text{ et }i_k=n+1}\mathbb{P}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_{k-1}}\cap A_{i_k})\\ &+\cdots+(-1)^{n+2}\mathbb{P}(A_1\cap\cdots\cap A_n\cap A_{n+1})\\ &= \sum_{i=1}^{n+1}\mathbb{P}(A_i)+\cdots+(-1)^{k+1}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n+1}\mathbb{P}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k})+\cdots+(-1)^{n+2}\mathbb{P}(A_1\cap\cdots\cap A_{n+1})\end{aligned}$$

- *(conclusion)* D'après le théorème de récurrence on a donc, pour tout n de $\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, pour toute famille $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ d'évènements,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) + \cdots + (-1)^{k+1} \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n} \mathbb{P}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}) + \cdots + (-1)^{n+1}\mathbb{P}(A_1\cap\cdots\cap A_n).$$

3) Une modélisation est indispensable...

Modélisation 1 On numérote les joueurs de 1 à 3, les couleurs de 1 à 3 et les jetons de 1 à 24. Une répartition peut alors être vue comme un 24-arrangement $(j_1,\ldots,j_{24})$ de l'ensemble des jetons (le joueur 1 recevant les jetons j_1 à j_8, le joueur 2 les jetons j_9 à j_{17} et le joueur 3 les autres). La répartition s'effectuant au hasard, on munit l'ensemble Ω de ces 24-arrangements de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. On a $\mathrm{Card}(\Omega) = A_{24}^{24} = 24!$.

Si l'on note A_i l'évènement « Le joueur n°i a 8 jetons de la même couleur », on cherche à calculer $\mathbb{P}(A_1\cup A_2\cup A_3) = \sum_{i=1}^{3}\mathbb{P}(A_i) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3}\mathbb{P}(A_i\cap A_j) + \mathbb{P}(A_1\cap A_2\cap A_3)$.

- Pour $i\in\{1,\cdots,3\}$, $\mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(C_1\cup C_2\cup C_3)$ où C_i est l'évènement « Le joueur n°1 a 8 jetons de la même couleur i ». C_1 est constitué des 24-arrangements $(j_1,\ldots,j_{24})$ où $(j_1,\ldots,j_8)$ est un 8-arrangement de l'ensemble des jetons rouges et $(j_9,\ldots,j_{24})$ un 16-arrangement de l'ensemble des autres jetons. On a donc $\mathrm{Card}(C_1) = 8!16!$. C_2 et C_3 ayant le même cardinal et la réunion étant disjointe, on a finalement $\mathrm{Card}(A_1) = 3\,\mathrm{Card}(C_1)$ et $\mathbb{P}(A_1) = \dfrac{3.8!16!}{24!}$.
- De même, pour $1\leqslant i<j\leqslant 3$, $\mathbb{P}(A_i\cap A_j) = \mathbb{P}(A_1\cap A_2) = \mathbb{P}(C_{1,2}\cup C_{1,3}\cup C_{2,1}\cup C_{2,3}\cup C_{3,1}\cup C_{3,2})$ où, pour $i\neq j$, $C_{i,j}$ est l'évènement constitué des 24-arrangements $(j_1,\ldots,j_{24})$ où $(j_1,\ldots,j_8)$ est un 8-arrangement de l'ensemble des jetons de couleur i, $(j_9,\ldots,j_{16})$ un 8-arrangement de l'ensemble des jetons de couleur j et $(j_{17},\ldots,j_{24})$ un 8-arrangement de l'ensemble des autres jetons. On a donc $\mathrm{Card}(C_{i,j}) = 8!8!8!$ et $\mathbb{P}(A_1\cap A_2) = \dfrac{6.8!8!8!}{24!}$.
- Il est clair que $A_1\cap A_2\cap A_3 = A_1\cap A_2$.

Finalement, $\mathbb{P}(A_1\cup A_2\cup A_3) = 3\dfrac{3.8!16!}{24!} - 2\dfrac{6.8!8!8!}{24!} = \dfrac{1}{81\,719} - \dfrac{2}{9\times 81\,719\times 2\,145}$

soit $\mathbb{P}(A_1\cup A_2\cup A_3) = \dfrac{19\,303}{1\,577\,585\,295} \simeq 1,22.10^{-5}$.

Modélisation 2 On voit une répartition comme un triplet (J_1,J_2,J_3) où J_1 est une partie à 8 éléments de l'ensemble J des 24 jetons, J_2 une partie à 8 éléments de $J\backslash J_1$ et $J_3 = J\backslash(J_1\cup J_2)$. La répartition s'effectuant au hasard, on munit l'ensemble Ω de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$.

On a $\mathrm{Card}(\Omega) = \binom{24}{8}\binom{16}{8}$. En effet $\Omega = \displaystyle\bigcup_{A\subset J,\mathrm{Card}(A)=8}\ \bigcup_{B\subset J\backslash A,\mathrm{Card}(B)=8}\{(A,B,J\backslash(A\cup B)\}$ et donc

$$\mathrm{Card}(\Omega) = \sum_{A\subset J,\mathrm{Card}(A)=8}\ \sum_{B\subset J\backslash A,\mathrm{Card}(B)=8} \mathrm{Card}\left(\{(A,B,J\backslash(A\cup B)\}\right) = \sum_{A\subset J,\mathrm{Card}(A)=8}\ \sum_{B\subset J\backslash A,\mathrm{Card}(B)=8} 1$$

Avec les notations précédentes, on a $C_1 = \{(R,J_2,J_3),\ J_2\subset J\backslash R,\ \mathrm{Card}(J_2) = 8 \text{ et } J_3 = J\backslash(R\cup J_3)\}$ où R désigne l'ensemble des jetons rouges. On a alors $\mathrm{Card}(C_1) = \binom{16}{8}$ et donc $\mathbb{P}(A_1) = 3.\dfrac{\binom{16}{8}}{\binom{24}{8}\binom{16}{8}} = \dfrac{3.8!16!}{24!}$.

De même, $C_{1,2} = \{(R,V,B)\}$ donc $\mathrm{Card}(C_{1,2}) = 1$ et on en déduit rapidement $\mathbb{P}(A_1\cap A_2) = \dfrac{6}{\binom{24}{8}\binom{16}{8}}$ soit $\mathbb{P}(A_1\cap A_2) = \dfrac{6.8!8!8!}{24!}$.

On obtient bien sûr le même résultat final.

4) On numérote les N personnes (ainsi que leur smartphone) de 1 à N. Une redistribution est alors un N-arrangement $(t_1,\ldots,t_N)$ où t_i est le numéro du téléphone récupéré par la personne n°i. L'ensemble Ω des redistributions est alors de cardinal $A_N^N = N!$ (c'est le nombre de permutations de l'ensemble des smartphones). La redistribution s'effectuant au hasard, on munit Ω de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$.

Notons A_k l'évènement « la personne k récupère son smartphone ». On cherche $p = \mathbb{P}(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_N)$.

Or $\forall k$, $\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(A_1) = \dfrac{\text{Card}(A_1)}{\text{Card}(\Omega)}$ et A_1 est constitué des N-arrangements $(1, t_2, \ldots, t_N)$ où $(t_2, \ldots, t_N)$ est un $(N-1)$-arrangement de $\{2, \ldots, N\}$. On a donc $\mathbb{P}(A_1) = \dfrac{(N-1)!}{N!} = \dfrac{1}{N}$ (donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) = 1$).

De même, $\mathbb{P}(A_{k_1} \cap A_{k_2}) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \dfrac{(N-2)!}{N!}$ donc $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \binom{N}{2} \frac{(N-2)!}{N!} = \frac{1}{2!}$ puisqu'il y a autant de couples (i, j) tels que $1 \leqslant i < j \leqslant N$ que de parties à 2 éléments de $\{2, \ldots, N\}$.

Plus généralement, pour $1 \leqslant r < N$, $\mathbb{P}(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap ... \cap A_{k_r}) = \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_r) = \dfrac{(N-r)!}{N!}$ car $A_1 \cap \cdots \cap A_r$ est constitué des N-arrangements $(1, 2, \ldots, r, t_{r+1}, \cdots, t_N)$ où $(t_{r+1}, \ldots, t_N)$ est un $(N-r)$-arrangement de $\{r+1, \ldots, N\}$. On en déduit $\displaystyle\sum_{1 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_r \leqslant N} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap ... \cap A_{k_r}) = \binom{N}{r} \frac{(N-r)!}{N!} = \frac{1}{r!}$ puisqu'il y a autant de r-uples vérifiant $1 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_r \leqslant N$ que de parties à r éléments de $\{2, \ldots, N\}$.

On a finalement :

$$p = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - ... + (-1)^{N+1} \frac{1}{N!}$$

On sait d'autre part que pour tout réel x on a $exp(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{x^n}{n!}$ et en particulier $1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - ... + (-1)^N \frac{1}{N!} \xrightarrow[N \to +\infty]{} e^{-1}$. La probabilité qu'au moins une personne récupère son téléphone tend donc vers $1 - \dfrac{1}{e} \approx 0,632$.