Université de Rennes

PRA1 - Probabilités

Exercice à rendre pour le vendredi 27 octobre 2023

1) Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Si A_1, A_2 et A_3 sont trois éléments de $\mathscr{P}(\Omega)$, montrer que :

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_3 \cap A_1) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

2) Généraliser ce résultat en montrant que pour toute famille $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ d'évènements, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \cdots + (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) + \cdots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$$

3) Une urne contient 24 jetons : 8 rouges, 8 verts et 8 bleus. On répartit au hasard ces jetons entre trois joueurs (chacun recevant donc huit jetons). Quelle est la probabilité pour qu'au moins l'un des joueurs ait huit jetons de la même couleur ?

4) N personnes déposent leur smartphone à l'entrée d'une salle de spectacle. Ceux-ci leur sont redistribués au hasard à la sortie. Quelle est la probabilité qu'au moins une personne récupère son téléphone ? Quelle est la limite de cette probabilité lorsque N tend vers l'infini ?

Master 1 MEEF - PLC - Parcours Mathématiques 2023-2024

Université de Rennes

PRA1 - Probabilités

Exercice à rendre pour le vendredi 27 octobre 2023

1) Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Si A_1, A_2 et A_3 sont trois éléments de $\mathscr{P}(\Omega)$, montrer que :

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_3 \cap A_1) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

2) Généraliser ce résultat en montrant que pour toute famille $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ d'évènements, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \cdots + (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) + \cdots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$$

3) Une urne contient 24 jetons : 8 rouges, 8 verts et 8 bleus. On répartit au hasard ces jetons entre trois joueurs (chacun recevant donc huit jetons). Quelle est la probabilité pour qu'au moins l'un des joueurs ait huit jetons de la même couleur ?

4) N personnes déposent leur smartphone à l'entrée d'une salle de spectacle. Ceux-ci leur sont redistribués au hasard à la sortie. Quelle est la probabilité qu'au moins une personne récupère son téléphone ? Quelle est la limite de cette probabilité lorsque N tend vers l'infini ?