UNIVERSITÉ DE RENNES 1

PRA1 - Probabilités

Corrigé détaillé de l'exercice à rendre pour le 20 octobre 2022

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons A_n l'ensemble $A_n = \{1, \cdots, n\}$.

Remarquons tout d'abord que, pour toute application $f : A_n \longrightarrow A_p$, on a $A_n = \bigcup_{k=1}^{p} f^{-1}(\{k\})$ et que, cette réunion étant disjointe, $n = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Card}\big(f^{-1}(\{k\})\big)$.

1) Dire qu'une telle application f est surjective revient à dire que tout élément de A_p a au moins un antécédent par f ou encore : $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\mathrm{Card}\big(f^{-1}(\{k\})\big) \geqslant 1$. Si f est surjective on a donc $n \geqslant \sum_{k=1}^{p} 1 = p$.
On a montré (par contraposition) que $S(n,p) = 0$ pour $p > n$.

2) Une application entre deux ensembles à n éléments est surjective si et seulement si elle est bijective. Or il y a $n!$ bijections de $\{1, \cdots, n\}$ sur lui-même donc $S(n,n) = n!$.
Il n'y a qu'une seule application de A_n dans $\{1\}$, et elle est constante et bien sûr surjective. Donc $S(n,1) = 1$.

3) Il y a une bijection φ de l'ensemble $\mathscr{F}$ des applications de $\{1, \cdots, n\}$ dans $\{1,2\}$ et l'ensemble $\mathscr{N}$ des n listes de $\{1,2\}$: $\varphi : f \longmapsto (f(1), \cdots, f(n))$. Il y a donc autant de telles applications qu'il y a de n-listes d'un ensemble à deux éléments soit 2^n. Parmi elles, deux seulement sont non surjectives (les applications constantes). Autrement dit $S(n,2) = 2^n - 2$.

4) Notons $\mathscr{S}$ l'ensemble des surjections $f : A_{p+1} \longrightarrow A_p$ et $\mathscr{S}_k$ l'ensemble des f de $\mathscr{S}$ pour lesquels $\mathrm{Card}\big(f^{-1}(\{k\})\big) = 2$. Si f est une application de A_{p+1} dans A_p, on a toujours $p+1 = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Card}\big(f^{-1}(\{k\})\big)$.
Par suite, $f \in \mathscr{S}$ si et seulement si tous les éléments de A_p ont exactement un antécédent, à l'exception d'un unique élément k de A_p qui en a deux : $f \in \mathscr{S} \iff \exists k \in A_p$, $f \in \mathscr{S}_k$. On a donc $\mathscr{S} = \bigcup_{k=1}^{p} \mathscr{S}_k$.
Cette réunion étant clairement disjointe, on en déduit $\mathrm{Card}(\mathscr{S}) = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Card}(\mathscr{S}_k) \quad (1)$.
De même, en notant $\mathscr{S}_{k,A}$ l'ensemble des f de $\mathscr{S}_k$ pour lesquels $f^{-1}(\{k\}) = A$, on a $\mathscr{S}_k = \bigcup_{A \in \mathscr{C}} \mathscr{S}_{k,A}$ où $\mathscr{C}$ désigne l'ensemble des parties à deux éléments de A_{p+1}. Cette réunion étant également disjointe, on en déduit $\mathrm{Card}(\mathscr{S}_k) = \sum_{A \in \mathscr{C}} \mathrm{Card}(\mathscr{I}_{k,A}) \quad (2)$.
Enfin, pour k et A fixés, posons ψ l'application $f \longmapsto g$ où $g : A_{p+1} \backslash A \longrightarrow A_p \backslash \{k\}$ est définie par $\forall x \in: A_{p+1} \backslash A$, $g(x) = f(x)$. Montrons que ψ est une bijection de $\mathscr{S}_{k,A}$ dans l'ensemble $\mathscr{B}$ des bijections de $A_{p+1} \backslash A$ dans $A_p \backslash \{k\}$ (il est en effet clair que g est encore surjective donc bijective puisque $A_{p+1} \backslash A$ et $A_p \backslash \{k\}$ ont même cardinal) :

- Pour f et f' dans $\mathscr{S}_{k,A}$, $\psi(f) = \psi(f')$ entraîne $\forall x \in A_{p+1} \backslash A$, $f(x) = f'(x)$ et $\forall x \in A$, $f(x) = k = f'(x)$ et donc $f = f'$: ψ est injective.
- Soit g une bijection de $A_{p+1} \backslash A$ dans $A_p \backslash \{k\}$. Posons $f : A_{p+1} \longrightarrow A_p$, $x \longmapsto \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in A_{p+1} \backslash A \\ k & \text{si } x \in A. \end{cases}$

f est alors surjective et $\psi(f) = g$: ψ est surjective.

Du fait de cette bijection, $\text{Card}(\mathscr{S}_{k,A}) = \text{Card}(\mathscr{B}) = (p-1)!$.

En reportant dans (2), il vient $\text{Card}(\mathscr{S}_k) = \displaystyle\sum_{A\in\mathscr{C}} (p-1)! = \binom{p+1}{2}(p-1)!$ car $\text{Card}(\mathscr{C}) = \binom{p+1}{2}$.

En reportant enfin dans (1), on a $\text{Card}(\mathscr{S}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \binom{p+1}{2}(p-1)! = p.\binom{p+1}{2}(p-1)!$.

On a donc bien $S(p+1,p) = \dfrac{p}{2}(p+1)!$.

5) Notons $\mathscr{F}_i = \{f : A_n \longrightarrow A_p,\ \text{Card}\,(f\,(A_n)) = i\}$ et, pour toute partie B de A_p de cardinal i, notons $\mathscr{F}_{i,B} = \{f \in \mathscr{F}_i,\ f\,(A_n) = B\}$. On a alors $\mathscr{F}_i = \displaystyle\bigcup_{B\in\mathscr{D}} \mathscr{F}_{i,B}$ où $\mathscr{D}$ désigne l'ensemble des parties à i éléments de A_p. La réunion étant disjointe, on en déduit $\text{Card}(\mathscr{F}_i) = \displaystyle\sum_{B\in\mathscr{D}} \text{Card}(\mathscr{F}_{i,B})$.

Enfin, pour i et B fixés, posons h l'application $f \longmapsto \tilde{f}$ où $\tilde{f} : A_n \longrightarrow B,\ x \longmapsto f(x)$. Montrons que h est une bijection de $\mathscr{F}_{i,B}$ dans l'ensemble des surjections de A_n dans B (l'application $\tilde{f}$ est bien surjective) :

• Il est clair que, pour f et f' dans $\mathscr{F}$, $h(f) = h(f')$ entraîne $f = f'$: h est injective.

• Si g est une surjection de A_n dans B, soit $g' : A_n \longrightarrow A_p,\ x \longmapsto g(x)$. Alors $h(g') = g$ car $g(A_n) = B$. h est donc surjective.

Du fait de cette bijection h, $\text{Card}(\mathscr{F}_{i,B}) = S(n,i)$ (par définition de S).

On en déduit $\text{Card}(\mathscr{F}_i) = \displaystyle\sum_{B\in\mathscr{D}} S(n,i) = \binom{p}{i} S(n,i)$ (car $S(n,i)$ ne dépend pas de l'indice de sommation).

6) De même qu'en 3), il y a une bijection φ de l'ensemble $\mathscr{F}$ des applications de A_n dans A_p et l'ensemble $\mathscr{N}$ des n listes de A_p : $\varphi : f \longmapsto (f(1), \cdots, f(n))$. Il y a donc autant de telles applications qu'il y a de n-listes d'un ensemble à p éléments soit p^n.

Pour toute application $f : A_n \longrightarrow A_p$, on a $f(A_n) \subset A_p$. On a donc $\mathscr{F} = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{p} \mathscr{F}_i$ et, cette réunion étant clairement disjointe, $\text{Card}(\mathscr{F}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \text{Card}(\mathscr{F}_i)$ soit $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \binom{p}{i} S(n,i) = p^n$.