

Algèbre et Géométrie 1

Corrigé rapide de l'exercice du 5 novembre 2019

1) Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux éléments de \mathcal{A} . Notons $(c_{ij}) = AB$ et $(d_{ij}) = BA$.

On a $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$ donc $\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki}$. D'autre part, $d_{kl} = \sum_{i=1}^n b_{ki}a_{il}$ et donc

$\text{Tr}(BA) = \sum_{k=1}^n d_{kk} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ki}a_{ik}$. Par commutativité de la somme et du produit dans \mathbb{C} , on a bien finalement $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

Si on prend $B = {}^t\bar{A}$, alors la trace de AB vaut $\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 > 0$ (si A n'est pas nulle). Une autre solution consiste à repérer un $a_{ij} \neq 0$ et à choisir B dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé sur la j -ème ligne et la i -ème colonne qui vaut 1. On a alors $\text{Tr}(AB) = a_{ij}$.

2)a) On a, d'après la question précédente, $\text{Tr}(BA.B) = \text{Tr}(B^2.A) = \text{Tr}(A)$. Or, $AB = -BA$, donc $\text{Tr}(BAB) = -\text{Tr}(AB^2) = -\text{Tr}(A)$ et A est de trace nulle. Comme A et B jouent le même rôle, B est aussi de trace nulle.

b) La matrice A , ayant pour polynôme annulateur $X^2 - 1$ qui est scindé et à racines simples, est diagonalisable. Les valeurs propres de A sont de plus à prendre parmi les racines de ce polynôme. Si seule 1 (resp. -1) était valeur propre de A , alors A (qui est diagonalisable) serait semblable à l'identité (resp. $-I_n$) donc serait égale à I_n (resp. $-I_n$). C'est impossible car A est de trace nulle. A a donc pour spectre $\{-1, 1\}$. Si α et β désignent les multiplicités de ces valeurs propres, la trace de A est alors $0 = \alpha \times 1 + \beta \times (-1)$ donc $\alpha = \beta$. A étant diagonalisable, α et β sont les dimensions des sous-espaces propres correspondants, sous-espaces qui sont supplémentaires dans \mathbb{C}^n : $\alpha + \beta = n = 2\alpha$. Les deux valeurs propres de A ont pour multiplicité $\frac{n}{2}$. On procède de même pour B .

c) Ce qui précède montre que $\frac{n}{2} \in \mathbb{N}$: n est pair. On pouvait obtenir ce résultat autrement :

On a $\text{Det}(AB) = \text{Det}(A)\text{Det}(B) = \text{Det}(BA)$. Or, $BA = -AB$ donc $\text{Det}(AB) = (-1)^n \text{Det}(AB)$ et donc n est pair (car AB est inversible comme produit d'inversibles et donc $\text{Det}(AB) \neq 0$).

d) On a $(iAB)^2 = -ABAB = +BA^2B = BIB = B^2 = I$ et $(iAB)A = iABA = iA(-AB) = -iB$ tandis que $A(iAB) = iA^2B = iB$: il y a anticommutation. On applique alors les résultats de la question précédente : iAB a pour valeurs propres 1 et -1 avec des espaces propres de dimension $\frac{n}{2}$. Dès lors, AB a pour valeurs propres i et $-i$ et des espaces propres de dimension $\frac{n}{2}$ et est diagonalisable.

3)a) On a $f : \mathbb{C}^n = E_1(f) \oplus E_{-1}(f) \rightarrow \mathbb{C}^n$, $x = x_1 + x_2 \mapsto f(x_1) + f(x_2) = x_1 - x_2$: f est la symétrie par rapport à $E_1(f)$, parallèlement à $E_{-1}(f)$.

b) On a évidemment $E_1(f) \cap E_{-1}(f) = \{0\}$. Soit alors $x \in E_1(f) \cap E_1(g)$. On a $f(x) = g(x) = x$ donc $f \circ g(x) = x = g \circ f(x)$. Or, $f \circ g = -g \circ f$ donc $x = 0$ et $E_1(f) \cap E_1(g) = \{0\}$. On vérifie de la même manière que les autres intersections sont nulles.

c) Soit $x \in E_1(g)$ alors $f(g(x)) = f(x) = -g(f(x))$, donc $f(x) \in E_{-1}(g)$: $f(E_1(g)) \subset E_{-1}(g)$. f étant bijective, on a par ailleurs $\dim(f(E_1(g))) = \dim(E_1(g)) = \dim(E_{-1}(g))$ et donc finalement, $f(E_1(g)) = E_{-1}(g)$. On en déduit immédiatement, $E_1(g) = f \circ f(E_1(g)) = f(E_{-1}(g))$.