Corrigé rapide du problème d'algèbre n°2

1) Soient $A=(a_{ij})$ et $B=(b_{ij})$ deux éléments de $\mathcal{A}$. Notons $(c_{ij})=AB$ et $(d_{ij})=BA$.
On a $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ donc $\mathrm{Tr}(AB)=\sum_{i=1}^{n} c_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}$. D'autre part, $d_{k\ell}=\sum_{i=1}^{n} b_{ki}a_{i\ell}$ et donc $\mathrm{Tr}(BA)=\sum_{k=1}^{n} d_{kk}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ki}a_{ik}$. On a bien $\mathrm{Tr}(AB)=\mathrm{Tr}(BA)$.
Si on prend $B={}^t\overline{A}$, alors la trace de AB vaut $\sum_{i,j}|a_{ij}|^2>0$ (si A n'est pas nulle). Une autre solution consiste à repérer un $a_{ij}\neq 0$ et à choisir B dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé sur la j-ème ligne et la i-ème colonne qui vaut 1. On a alors $\mathrm{Tr}(AB)=a_{ij}$.

2) a) On a $\mathrm{Tr}(BA.B)=\mathrm{Tr}(B^2.A)=\mathrm{Tr}(A)$. Or, $AB=-BA$, donc $\mathrm{Tr}(BAB)=-\mathrm{Tr}(AB^2)=-\mathrm{Tr}(A)$ et A est de trace nulle. Comme A et B jouent le même rôle, B est aussi de trace nulle.

b) Les matrices A et B ayant un polynôme annulateur X^2-1, scindé et à racines simples, elles sont diagonalisables. De plus, le polynôme minimal de A (comme de B) n'est pas $X-1$ car alors $A=I$ n'aurait pas une trace nulle. Il ne vaut pas davantage $X+1$. Le polynôme minimal de A est donc X^2-1, ce qui donne pour spectre $\{-1,1\}$. Si α et β désignent les multiplicités de ces valeurs propres, la trace de A est alors $0=\alpha\times 1+\beta\times(-1)$ donc $\alpha=\beta$. A étant diagonalisable, α et β sont les dimensions des sous-espaces propres correspondants, sous-espaces qui sont supplémentaires dans $\mathbb{C}^n$: $\alpha+\beta=n=2\alpha$. Les deux valeurs propres de A ont pour multiplicité $\frac{n}{2}$.

c) Ce qui précède montre que $\frac{n}{2}\in\mathbb{N}$: n est pair. On pouvait obtenir ce résultat autrement :
On a $\mathrm{Det}(AB)=\mathrm{Det}(A)\mathrm{Det}(B)=\mathrm{Det}(BA)$. Or, $BA=-AB$ donc $\mathrm{Det}(AB)=(-1)^n\mathrm{Det}(AB)$ et donc n est pair (car AB est inversible comme produit d'inversibles).

d) On a $(iAB)^2=-ABAB=+BA^2B=BIB=B^2=I$ et $(iAB)A=iABA=iA(-AB)=-iB$ tandis que $A(iAB)=iA^2B=iB$: il y a anticommutation. On applique alors les résultats de la question précédente : iAB a pour valeurs propres 1 et -1 avec des espaces propres de dimension $\frac{n}{2}$. Dès lors, AB a pour valeurs propres i et $-i$ et des espaces propres de dimension $\frac{n}{2}$.

3) a) On a $f:\mathbb{C}^n=E_1(f)\oplus E_{-1}(f)\longrightarrow\mathbb{C}^n$, $x=x_1+x_2\longmapsto f(x_1)+f(x_2)=x_1-x_2$: f est la symétrie par rapport à $E_1(f)$, parallèlement à $E_{-1}(f)$.

b) On a évidemment $E_1(f)\cap E_{-1}(f)=\{0\}$. Soit alors $x\in E_1(f)\cap E_1(g)$. On a $f(x)=g(x)=x$ donc $f\circ g(x)=x=g\circ f(x)$. Or, $f\circ g=-g\circ f$ donc $x=0$ et $E_1(f)\cap E_1(g)=\{0\}$. On vérifie de la même manière que les autres intersections sont nulles.

c) Soit $x\in E_1(g)$ alors $f(g(x))=f(x)=-g(f(x))$, donc $f(x)\in E_{-1}(g)$: $f(E_1(g))\subset E_{-1}(g)$. f étant bijective, on a par ailleurs $\dim(f(E_1(g)))=\dim(E_1(g))=\dim(E_{-1}(g))$ et donc finalement, $f(E_1(g))=E_{-1}(g)$. On en déduit immédiatement, $E_1(g)=f\circ f(E_1(g))=f(E_{-1}(g))$.