

## Préparation au CAPES de Mathématiques

**Problème d'algèbre n°2***A rendre pour le jeudi 8 octobre 2009*

Dans tout le problème,  $n$  est un entier naturel non nul et  $\mathcal{A} = \mathcal{M}(n, \mathbb{C})$  est l'ensemble des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients complexes. On note  $I$  l'élément neutre de  $\mathcal{A}$  pour la multiplication des matrices et, pour toute matrice  $A$  de  $\mathcal{A}$ ,  $\text{Tr}(A)$  désigne la trace de  $A$ .

- 1) Soient  $A$  et  $B$  deux éléments de  $\mathcal{A}$ . Vérifier l'égalité  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ .  
Si  $A$  n'est pas la matrice nulle, comment peut-on choisir  $B$  pour que  $\text{Tr}(AB)$  ne soit pas nulle ?
- 2) On suppose que  $A$  et  $B$  vérifient les égalités  $A^2 = B^2 = I$  et qu'elles anticommulent, c'est-à-dire qu'elles vérifient l'égalité  $AB = -BA$ .
  - a) Montrer que  $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B) = 0$ . (On pourra, par exemple, chercher à simplifier  $\text{Tr}(BAB)$ .)
  - b) Les matrices  $A$  et  $B$  sont-elles diagonalisables ? Quelles sont leurs valeurs propres et les ordres de multiplicité de ces valeurs propres ?
  - c) En déduire que  $n$  est nécessairement pair. Pouvait-on obtenir ce résultat autrement ?
  - d) Montrer la matrice  $iAB$  anticommute avec  $A$ . En déduire que  $AB$  est diagonalisable.
- 3) Soient  $f$  et  $g$  les endomorphismes de  $\mathbb{C}^n$  respectivement représentés, dans une base de  $\mathbb{C}^n$ , par les matrices  $A$  et  $B$  de la question 2.
  - a) Donner, en la justifiant, une interprétation géométrique de l'endomorphisme  $f$ .
  - b) Quelles sont les intersections deux à deux des sous-espaces propres de  $f$  et  $g$  ?
  - c) Montrer que  $f$  échange les deux sous-espaces propres de  $g$ .