Algèbre et Géométrie 1

Exercice à rendre pour le 5 novembre 2019

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul et $\mathscr{A} = \mathscr{M}(n, \mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes. On note I l'élément neutre de $\mathscr{A}$ pour la multiplication des matrices et, pour toute matrice A de $\mathscr{A}$, $\mathrm{Tr}(A)$ désigne la trace de A.

1) Soient A et B deux éléments de $\mathscr{A}$. Vérifier l'égalité $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
Si A n'est pas la matrice nulle, comment peut-on choisir B pour que $\mathrm{Tr}(AB)$ ne soit pas nulle ?

2) On suppose que A et B vérifient les égalités $A^2 = B^2 = I$ et qu'elles ***anticommutent***, c'est-à-dire qu'elles vérifient l'égalité $AB = -BA$.

a) Montrer que $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B) = 0$. (On pourra, par exemple, chercher à simplifier $\mathrm{Tr}(BAB)$.)

b) Les matrices A et B sont-elles diagonalisables ? Quelles sont leurs valeurs propres et les ordres de multiplicité de ces valeurs propres ?

c) En déduire que n est nécessairement pair. Pouvait-on obtenir ce résultat autrement ?

d) Montrer la matrice iAB anticommute avec A. En déduire que AB est diagonalisable.

3) Soient f et g les endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ respectivement représentés, dans une base de $\mathbb{C}^n$, par les matrices A et B de la question 2.

a) Donner, en la justifiant, une interprétation géométrique de l'endomorphisme f.

b) Quelles sont les intersections deux à deux des sous-espaces propres de f et g ?

c) Montrer que f échange les deux sous-espaces propres de g.