PRA1 : Analyse et Probabilités

Corrigé rapide de l'exercice à rendre pour le 27 septembre 2016

Exercice

1) Soient f une fonction lipschitzienne sur I et k un réel tel que : $\forall (x,y) \in I^2$, $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$.
Soit $y \in \mathbb{R}$. Comme $k|x-y| \xrightarrow[x \to y]{} 0$ on déduit $\lim\limits_{x \to y} f(x) = f(y)$: f est continue en y.
On a bien montré que f est continue sur I.

2) Considérons donc des réels k et ℓ tels que $\forall (x,y) \in I^2$, $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$ et $|g(x) - g(y)| \leqslant \ell|x-y|$.
Soit $(x,y) \in I^2$.

$$\begin{aligned} |(f+\lambda g)(x) - (f+\lambda g)(y)| &= |f(x) - f(y) + \lambda(g(x) - g(y))| \\ &\leqslant |f(x) - f(y)| + |\lambda| \,.\, |g(x) - g(y)| \\ &\leqslant k\,|x-y| + \ell\,|\lambda|\,|x-y| = (k + \ell\,|\lambda|)\,|x-y| \end{aligned}$$

$f + \lambda g$ est donc bien lipchitzienne.

3) On choisit par exemple $I = \mathbb{R}$, $f : x \longmapsto x$ et $g = f$. f et g sont alors lipschitziennes (on peut prendre $k = 1$) mais fg ne l'est pas puisque s'il existait un réel k tel que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|(fg)(x) - (fg)(y)| \leqslant k|x-y|$ alors on aurait en particulier $\forall x \neq y$, $|x+y| \leqslant k$ ce qui est clairement impossible.

4) f et g étant continues sur le segment $[a,b]$, elles y sont bornées et on peut considérer des majorants M (respectivement N) de $|f|$ (resp. $|g|$) sur cet intervalle. Soit alors $(x,y) \in [a,b]^2$. En conservant les notations de la question 2), on a :

$$\begin{aligned} |(fg)(x) - (fg)(y)| &= |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\ &= |f(x)[g(x) - g(y)] + g(y)[f(x) - f(y)]| \\ &\leqslant M\,|g(x) - g(y)| + N\,|f(x) - f(y)| \\ &\leqslant M\ell\,|x-y| + Nk\,|x-y| = (M\ell + Nk)\,|x-y| \end{aligned}$$

fg est donc bien lipchitzienne sur $[a,b]$.

5) Soient f une fonction lipschitzienne sur I et k un réel tel que : $\forall (x,y) \in I^2$, $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$.
Soit $y \in I$. Pour tout réel $x \neq y$ on a $\left|\dfrac{f(x) - f(y)}{x-y}\right| \leqslant k$. f étant supposée dérivable en y, en passant à la limite quand x tend vers y on obtient $|f'(y)| \leqslant k$. f' est donc bien bornée.

6)

a) f est clairement dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ donc f est également dérivable en 0 (et $f'(0) = 0$). f est finalement dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) On a $\forall x \neq 0$, $f'(x) = 2x \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) - \dfrac{2}{x}\cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ et donc en particulier, pour tout entier naturel non nul n, $f'(\dfrac{1}{\sqrt{2n\pi}}) = -2\sqrt{2n\pi} \xrightarrow[n \to \infty]{} -\infty$. f' n'est donc pas bornée et par suite, d'après la question 5), f n'est pas lipchitzienne sur $\mathbb{R}$.