

PRA1 : Analyse et Probabilités

Exercice à rendre pour le 27 septembre 2016

Exercice

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I . On dit que f est lipschitzienne sur I s'il existe un réel k tel que :

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

On note $\mathcal{L}(I)$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes sur I .

- 1) Montrer que si f est lipschitzienne sur I alors f est continue sur I .
- 2) Soient f et g deux fonctions appartenant à $\mathcal{L}(I)$ et λ un réel. Montrer que $f + \lambda g$ est aussi un élément de $\mathcal{L}(I)$.
- 3) Trouver un intervalle I et deux fonctions f et g telles que f et g soient toutes les deux lipschitziennes sur I mais $f.g$ n'est pas lipschitzienne sur I .
- 4) Soient a et b ($a < b$) deux nombres réels. Montrer que si f et g sont lipschitziennes sur $[a, b]$ alors $f.g$ est aussi lipschitzienne sur $[a, b]$.
- 5) Soit I un intervalle ouvert. On suppose que f est lipschitzienne et dérivable sur I . Montrer que sa dérivée est bornée.

- 6) Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- a) Cette fonction est-elle dérivable sur \mathbb{R} ?
- b) f est-elle lipschitzienne sur \mathbb{R} ?