

Préparation au CAPES de Mathématiques

Problème de géométrie n°2

A rendre pour le jeudi 2 octobre 2008

Dans tout le problème, \mathcal{P} désigne un plan affine euclidien, A un point de \mathcal{P} et \mathcal{D} une droite de \mathcal{P} ne passant pas par A .

On note d'une part \mathcal{R}_A l'ensemble des rotations laissant A invariant, et d'autre part, pour toute droite \mathcal{D}' , $s_{\mathcal{D}'}$ la réflexion d'axe \mathcal{D}' .

Soit G le sous-groupe (du groupe des isométries) engendré par $\mathcal{R}_A \cup \{s_{\mathcal{D}}\}$.

Le but de l'exercice est de démontrer que G est le groupe des isométries.

1) Soit $\alpha > 0$ un réel et u un vecteur de $\vec{\mathcal{P}}$.

Démontrer que $\|u\| \leq 2\alpha$ si et seulement s'il existe deux vecteurs v et v' de norme α tels que $u = v + v'$.

2) Soit r un élément de \mathcal{R}_A . Préciser la nature exacte des transformations suivantes :

a) $s_{\mathcal{D}} \circ r \circ s_{\mathcal{D}}^{-1}$

b) $r \circ s_{\mathcal{D}} \circ r^{-1}$

3) Soit ρ la distance de A à \mathcal{D} et Γ le cercle de centre A de rayon ρ .

Déduire de 2) que si M et M' sont deux points diamétralement opposés de Γ la translation de vecteur $2\overrightarrow{MM'}$ appartient à G .

4) Déduire de 1) que si u est un vecteur tel que $\|u\| \leq 8\rho$ la translation de vecteur u appartient à G .

5) Conclure.