PRA2 : Analyse et Probabilités

Correction rapide de l'exercice à rendre pour le 15 février 2017

Partie 1 : Convergence et calcul

1) $f : t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est continue donc localement intégrable sur $]0, +\infty[$.

- f est prolongeable par continuité en 0 ($f(0) = 1$) donc $\displaystyle\int_0 f$ converge.
- Soit $X > 1$. $t \mapsto -\cos t$ et $t \mapsto \frac{1}{t}$ sont de classe C^1 sur $[1, X]$ donc (théorème d'intégration par parties) $\displaystyle\int_1^X f(t)\,dt = \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_1^X - \int_1^X \frac{\cos t}{t^2}\,dt$. Or d'une part, $\displaystyle\left[-\frac{\cos t}{t}\right]_1^X = -\frac{\cos X}{X} + \frac{\cos 1}{1} \xrightarrow[X\to+\infty]{} \cos 1$ et d'autre part $\displaystyle\left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}$ et $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge donc $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,dt$ converge absolument. Par suite, $\displaystyle\int_1^X f(t)\,dt$ a une limite finie quand X tend vers $+\infty$ et donc $\displaystyle\int^{+\infty} f$ converge.

2) Il est clair que $J_0 = \dfrac{\pi}{2}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. $f : t \longmapsto \dfrac{\sin(2n+1)t}{\sin t}$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ (en posant $f(0) = 2n+1$) et on a $\displaystyle J_{n+1} - J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+3)t - \sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt$.

On a donc $\displaystyle J_{n+1} - J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos(2n+2)t\,dt$ (puisque $\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$) et par suite, $\displaystyle J_{n+1} - J_n = 2\left[\frac{\sin(2n+2)t}{2n+2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$. Finalement, $J_{n+1} = J_n$ et donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ J_n = \dfrac{\pi}{2}$.

3)

a) φ est clairement de classe C^1 sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et on a $\forall t \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $\varphi(t) = \dfrac{\sin t - t}{t \sin t} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{-\frac{t^3}{6}}{t^2} = -\dfrac{t}{6}$. f est donc prolongeable par continuité en posant $\varphi(0) = 0$.

De plus, $\forall t \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $\varphi'(t) = -\dfrac{1}{t^2} + \dfrac{\cos t}{\sin^2 t} = \dfrac{-\sin^2 t + t^2\cos t}{t^2 \sin^2 t}$ donc $\varphi'(t) = \dfrac{-\frac{1}{6}t^4 + t^4\varepsilon(t)}{t^2\sin^2 t} \xrightarrow[t\to 0]{} -\dfrac{1}{6}$.

Par suite φ est bien de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. $g : t \longmapsto \dfrac{\sin(2n+1)t}{t}$ est continue donc intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ (en posant $g(0) = 2n+1$).

On peut donc calculer $I_n - J_n$: $\displaystyle I_n - J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\sin(2n+1)t\,dt$. φ étant de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ (et évidemment aussi $t \longmapsto \dfrac{-\cos(2n+1)t}{2n+1}$), on peut alors procéder à une intégration par parties pour obtenir :

$$I_n - J_n = \left[\varphi(t)\frac{-\cos(2n+1)t}{2n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n+1)t}{2n+1}\varphi'(t)\,dt = \frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos(2n+1)t]\varphi'(t)\,dt.$$

Par suite, $\displaystyle\left|I_n - \frac{\pi}{2}\right| = |I_n - J_n| \leqslant \frac{1}{2n+1}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi'(t)|\,dt\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. On a donc bien $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n = \frac{\pi}{2}$.

4) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\displaystyle I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{(2n+1)t}(2n+1)dt$. Or, $\psi : t \longmapsto (2n+1)t$ est de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est continue sur $[\psi(0), \psi(\frac{\pi}{2})]$ donc (théorème de changement de variable) (« On pose $u = (2n+1)t$ ») $\displaystyle I_n = \int_0^{\frac{(2n+1)\pi}{2}} \frac{\sin u}{u}\,du$. Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$ converge donc (caractérisation séquentielle de la limite) $\displaystyle\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$.

Partie 2 : Semi-convergence

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. $G((n+1)\pi) - G(n\pi) = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\, dt = \int_0^{\pi} \frac{|\sin u|}{u+n\pi} \geqslant \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{\pi + n\pi}\, du$ c'est à dire :

$$G((n+1)\pi) - G(n\pi) \geqslant \frac{1}{(n+1)\pi}\left[-\cos u\right]_0^{\pi} = \frac{2}{(n+1)\pi}$$

Comme $G(0) = \displaystyle\int_0^0 \frac{|\sin t|}{t}\, dt = 0$, on a donc $G((n+1)\pi) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}[G((k+1)\pi) - G(k\pi)] \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{(k+1)\pi}$.

2) Pour $x > y \geqslant 0$, on a $G(x) - G(y) = \displaystyle\int_y^x \frac{|\sin t|}{t} dt \geqslant 0$ (intégrale d'une fonction positive sur $[y,x]$). G est donc bien croissante sur $\mathbb{R}^+$. Or $\displaystyle\sum \frac{1}{k+1}$ étant une série <u>positive</u> divergente, on a d'après la question précédente $\displaystyle\lim_{n\to\infty} G((n+1)\pi) = +\infty$. Par suite, G n'est pas majorée et donc (puisque G est croissante) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} G(x) = +\infty$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, du$ ne converge donc pas absolument.