PRA2 : Analyse et Probabilités

Exercice à rendre pour le 15 février 2017

Partie 1 : Convergence et calcul

1) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ converge.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\, dt$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $J_{n+1} - J_n = 0$. *(On pourra utiliser une formule de trigonométrie...)*
En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ J_n = \dfrac{\pi}{2}$.

3) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{t}\, dt$.

a) Soit $\varphi :]0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin t}$.
Montrer que φ se prolonge en une application de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $|I_n - J_n| \leqslant \dfrac{1}{2n+1}\left(\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi'(t)|\, dt\right)$. *(On pourra procéder à une intégration par parties.)* En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{\pi}{2}$.

4) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$.

Partie 2 : Semi convergence

Soit $G : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \frac{|\sin t|}{t}\, dt$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $G((n+1)\pi) - G(n\pi) \geqslant \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{\pi + n\pi}\, du$. En déduire $G((n+1)\pi) \geqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2}{(k+1)\pi}$.
(On pourra remarquer que $G(0) = 0$ et écrire $G((n+1)\pi)$ sous la forme d'une somme.)

2) Démontrer que G est croissante sur $\mathbb{R}^+$. En déduire alors que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} G(x) = +\infty$. Quelle conséquence cela a-t-il pour l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$?