UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et Géométrie 1

Corrigé rapide de l'exercice à rendre pour le 6 novembre 2018

1) On trouve $H(v) = I_3 - \dfrac{2}{9}\begin{pmatrix} 4 & -4 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} 9 = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \end{pmatrix}$.

2) En effet, si $v \in \mathbb{R}^n$ est non nul alors d'une part ${}^tH(v) = I_n - 2\dfrac{{}^t(v.{}^tv)}{{}^tv.v} = I_n - 2\dfrac{{}^t({}^tv).{}^tv}{{}^tv.v} = H(v)$ et d'autre part,

$$ {}^tH(v)H(v) = H(v)^2 = I_n - 4\frac{v\ {}^tv}{{}^tv.v} + 4\frac{v\ ({}^tvv)\ {}^tv}{({}^tv.v)^2} = I_n $$

3) Soit $H(v)$ une matrice de Householder (avec $v \neq 0$). Notons $\mathscr{P}$ l'hyperplan de $\mathbb{R}^n$ supplémentaire orthogonal de $\mathbb{R}v$. Alors $\mathbb{R}^n = \mathscr{P} \oplus \mathbb{R}v$ et tout u de $\mathbb{R}^n$ peut s'écrire de manière unique $u = u_1 + \lambda v$ avec $u_1 \in \mathscr{P}$ et $\lambda = \dfrac{<u,\, v>}{<v,\, v>} = \dfrac{{}^tv.u}{{}^tv.v}$.
Alors, d'une part, si $S_{\mathscr{P}}$ est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathscr{P}$, on a

$$ S_{\mathscr{P}}(u) = u_1 - \lambda v = u - 2\frac{{}^tv.u}{{}^tv.v}\ v $$

d'autre part, le produit matriciel étant associatif :

$$ H(v).u = u - 2\,\frac{v.\,{}^tv}{{}^tv.v}\ u = u - 2\,\frac{v.({}^tv.u)}{{}^tv.v} $$

Comme ${}^tv\ u = <v,\, u>$ est un scalaire, il commute avec v. Ainsi les deux endomorphismes $H(v)$ et $S_{\mathscr{P}}$ coïncident sur $\mathbb{R}^n$.

4) Il est clair que $\mathbb{R}^n = \mathscr{P} \oplus \mathbb{R}v$ et donc tout x de $\mathbb{R}^n$ peut s'écrire de manière unique $x = x_1 + \lambda v$ avec $x_1 \in \mathscr{P}$. Par définition : $p(x) = x_1 = x - \lambda v$. Comme $p(x)$ et v sont orthogonaux, on a immédiatement $\lambda = \dfrac{<x,\, v>}{\|v\|^2}$ soit $p(x) = x - \dfrac{<x,\, v>}{<v,\, v>}\ v$.
D'une part, on peut multiplier un vecteur à droite ou à gauche par un scalaire, d'autre part, le produit scalaire est symétrique et peut s'exprimer en termes de transposée de vecteurs ; de plus, le produit matriciel est associatif, donc :

$$ \begin{aligned} <x,\, v>\ v &= v\ <x,\, v> \\ &= v\ <v,\, x> \\ &= v\,({}^tv.x) \\ &= (v.\,{}^tv)\,x \end{aligned} $$

Ainsi, la matrice de p dans la base canonique est $I - \dfrac{1}{{}^tv.v}\, v.\,{}^tv = \dfrac{1}{2}(I + H(v))$.

5) On trouve les résultats suivants pour les deux exemples demandés :

$$ \text{projection : } \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 10 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{symétrie : } \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -8 & 4 \\ -8 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix} $$