UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et Géométrie 1

Exercice à rendre pour le 6 novembre 2018

On rappelle que ${}^tA$ désigne la transposée de la matrice A.
$\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire standard noté $<.,.>$.
Dans tout l'exercice, pour tout vecteur colonne a de $\mathbb{R}^n$, la matrice à une ligne et une colonne ${}^ta.a$ sera confondue avec son unique coefficient.

On appelle ***matrice de Householder*** toute matrice de la forme $H(v) = I - \dfrac{2}{{}^tv.v}\, v.\,{}^tv$ où v est un vecteur colonne non nul de $\mathbb{R}^n$ et I la matrice identité d'ordre n.

1) Expliciter la matrice de Householder $H(v)$ lorsque $n = 3$ et $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2) Montrer qu'une matrice de Householder est toujours symétrique (c'est à dire ${}^tH(v) = H(v)$) et orthogonale (c'est à dire ${}^tH(v).H(v) = I$).

3) Montrer qu'un endomorphisme admettant pour matrice une matrice de Householder H est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan $\mathscr{P}$ de $\mathbb{R}^n$.

4) Soit $\mathscr{P}$ un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ et soit v un vecteur non nul orthogonal à $\mathscr{P}$. On note p la projection orthogonale sur le plan $\mathscr{P}$. Montrer que pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$, on a $p(x) = x - \dfrac{<x, v>}{<v, v>}\, v$.

En déduire que la matrice de p dans la base canonique est $I - \dfrac{1}{{}^tv.v}\, v.\,{}^tv$ et exprimer cette matrice à l'aide de $H(v)$.

5) Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire standard, trouver les matrices, dans la base canonique, de :

a) la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $2x + 2y - z = 0$.

b) la projection orthogonale sur le plan d'équation $x - 3y + z = 0$.