Préparation au CAPES de Mathématiques

Corrigé rapide du problème d'algèbre n°2

Partie 1 : Matrices de Householder

1) On trouve $H(v) = I_3 - \dfrac{2}{9}\begin{pmatrix} 4 & -4 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} 9 = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \end{pmatrix}$.

2) En effet, si $v \in \mathbb{R}^n$ est non nul alors d'une part ${}^tH(v) = I_n - 2\dfrac{{}^t(v.{}^tv)}{{}^tv.v} = I_n - 2\dfrac{{}^t({}^tv).{}^tv}{{}^tv.v} = H(v)$ et d'autre part,

$$ {}^tH(v)H(v) = H(v)^2 = I_n - 4\frac{v\ {}^tv}{{}^tv.v} + 4\frac{v\ ({}^tvv)\ {}^tv}{({}^tv.v)^2} = I_n $$

3) Soit $H(v)$ une matrice de Householder (avec $v \neq 0$). Notons $\mathcal{P}$ l'hyperplan de $\mathbb{R}^n$ supplémentaire orthogonal de $\mathbb{R}v$. Alors$\mathbb{R}^n = \mathcal{P} \oplus \mathbb{R}v$ et tout u de $\mathbb{R}^n$ peut s'écrire de manière unique $u = u_1 + \lambda v$ avec $u_1 \in \mathcal{P}$ et $\lambda = \dfrac{< u, v >}{< v, v >} = \dfrac{{}^tv.u}{{}^tv.v}$.

Alors, d'une part, si $S_{\mathcal{P}}$ est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$, on a

$$ S_{\mathcal{P}}(u) = u_1 - \lambda v = u - 2\frac{{}^tv.u}{{}^tv.v}\ v $$

d'autre part, le produit matriciel étant associatif :

$$ H(v).u = u - 2\,\frac{v.\,{}^tv}{{}^tv.v}\ u = u - 2\,\frac{v.({}^tv.u)}{{}^tv.v} $$

Comme ${}^tv\ u =< v, u >$ est un scalaire, il commute avec v. Ainsi les deux endomorphismes $H(v)$ et $S_{\mathcal{P}}$ coïncident sur $\mathbb{R}^n$.

On en déduit immédiatement $\det H = -1$ ($Hv = -v$ et pour tout x de $\mathcal{P}$, $Hx = x$).

Partie 2 : Méthode de Householder

1) ${}^tv.v = ({}^ta - \alpha\,{}^te_1).(a - \alpha\, e_1) = {}^ta.a - \alpha\,{}^te_1.a - \alpha\ {}^ta.e_1 + \alpha^2\,{}^te_1.e_1$ donc ${}^tv.v = \alpha^2 - \alpha a_1 - \alpha a_1 + \alpha^2$ soit finalement ${}^tv.v = 2\alpha(\alpha - a_1)$. On remarque au passage que $v \neq 0$.

D'autre part, $v.\,{}^tv.a = (a - \alpha\, e_1).({}^ta - \alpha\,{}^te_1).a = a.\,{}^ta.a - \alpha e_1.\,{}^ta.a - \alpha a.\,{}^te_1.a + \alpha^2 e_1.\,{}^te_1.a$ soit $v.\,{}^tv.a = \alpha^2 a - \alpha^3 e_1 - \alpha a_1.a + \alpha^2 a_1.e_1$. On en déduit $H(v).a = a - \dfrac{\alpha(\alpha - a_1)(a - \alpha e_1)}{\alpha(\alpha - a_1)} = \alpha e_1$.

2)

a) Notons a le premier vecteur colonne de la matrice M. Si a est colinéaire à e_1, $Q_1 = I$ convient. Sinon, en gardant les notations de la question précédente, le premier vecteur colonne de la matrice $H(v).M$ est $H(v).a = \alpha e_1$ ce qui correspond au résultat attendu puisque $H(v)$ est une matrice orthogonale.

b) Le même raisonnement s'applique à la matrice M_1 et il existe donc une matrice orthogonale $\widehat{Q_2}$ telle que $\widehat{Q_2}M_1 = \begin{pmatrix} \lambda_2 & B_2 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$ où $M_2 \in \mathcal{M}_{n-2,p-2}(\mathbb{R})$. En posant $Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \widehat{Q_2} \end{pmatrix}$ on a alors $Q_2Q_1M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & B_1^1 & \cdots \\ 0 & \alpha_2 & B_2 \\ 0 & 0 & M_2 \end{pmatrix}$ où B_1^1 désigne la première composante du vecteur ligne B_1. On itère alors ce processus jusqu'à obtenir $Q_kQ_{k-1}\cdots Q_1M = R$ triangulaire supérieure. Cela permet de conclure puisque $Q_kQ_{k-1}\cdots Q_1$ est orthogonale comme produit de matrices orthogonales.

3) Soit $a = {}^t(-2,2,1)$. On cherche tout d'abord une matrice H_1 telle que $H_1(a) = \|a\|.e_1 = 3.e_1$. Cela nous conduit à poser $H_1 = I_3 - 2\dfrac{v.{}^tv}{{}^tv.v}$ où $\vec{v} = a - \|a\|e_1$ (méthode de Householder). On trouve $v = {}^t(-5,2,1)$ et $H_1 = \dfrac{1}{15}\begin{pmatrix} -10 & 10 & 5 \\ 10 & 11 & -2 \\ 5 & -2 & 14 \end{pmatrix}$.

À la fin de cette première étape on a donc $H_1M = \dfrac{1}{15}\begin{pmatrix} 45 & -30 & 20 & -30 \\ 0 & 9 & 7 & 9 \\ 0 & 12 & 26 & 12 \end{pmatrix}$.

On repart alors avec $M' = \dfrac{1}{15}\begin{pmatrix} 9 & 7 & 9 \\ 12 & 26 & 12 \end{pmatrix}$. On prend $a = {}^t(9,12)$ et on pose $\hat{H}_2 = I_2 - 2\dfrac{v.{}^tv}{{}^tv.v}$ où on a posé $v = a - \|a\|e_1 = {}^t(-6,12)$. On trouve $\hat{H}_2 = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ et donc $H_2 = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

Finalement $R = H_2H_1M = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}M$ soit : $R = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 9 & -6 & 4 & -6 \\ 0 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Bien sûr, $Q = H_1^{-1}H_2^{-1} = H_1H_2$ soit : $Q = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et on a bien … $M = QR$!

4) En appliquant la méthode de Householder à une matrice orthogonale $H \in \mathcal{M}(n,\mathbb{R})$ on obtient $H = H_1H_2\cdots H_mR$ (avec $m \leq n-1$) où les H_i sont des matrices de Householder (donc orthogonales) et R une matrice triangulaire supérieure. Mais alors $R = H_m\cdots H_1H$ est orthogonale et triangulaire : c'est une matrice diagonale avec des éléments diagonaux égaux à ± 1. D'autre part, les éléments diagonaux de $R = H_m\cdots H_1H$ sont par construction tous (sauf le dernier) des $\sqrt{{}^ta.a}$ donc sont positifs. Par suite, ou bien $R = Id$ et $H = H_1H_2\cdots H_m$ ou bien $R = H(e_n)$ et $H = H_1H_2\cdots H_mH(e_n)$. Géométriquement, cela signifie que toute isométrie linéaire est, en dimension n, produit d'au plus n réflexions.