Université de Rennes 1 **2008-2009**

Préparation au CAPES de Mathématiques

Problème d'algèbre n° 2

A rendre pour le jeudi 27 novembre 2008

Dans tout le problème, pour tout vecteur colonne a de $\mathbb{R}^n$, la matrice à une ligne et une colonne ${}^t a.a$ sera confondue avec son unique coefficient.

Partie 1 : Matrices de Householder

On appelle *matrice de Householder* toute matrice de la forme $H(v) = I - 2\,\dfrac{v.\,{}^t v}{{}^t v.v}$ où v est un vecteur colonne non nul de $\mathbb{R}^n$ et I la matrice identité d'ordre n.

1) Expliciter la matrice de Householder $H(v)$ lorsque $n = 3$ et $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2) Montrer qu'une matrice de Householder est toujours symétrique et orthogonale.

3) Montrer qu'un endomorphisme admettant pour matrice une matrice de Householder H est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^n$. En déduire la valeur du déterminant d'une matrice de Householder.

Partie 2 : Méthode de Householder

1) On munit $\mathbb{R}^n$ de sa base canonique de vecteurs colonnes $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$. Soit a un vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$ non colinéaire à e_1. On note $\alpha = \sqrt{{}^t a.a}$ et on pose $v = a - \alpha\, e_1$.

Montrer que ${}^t v.v = 2\alpha(\alpha - a_1)$ puis que $H(v).a = \alpha\, e_1$.

2) Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ où $n, p \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$.

a) Montrer qu'il existe une matrice orthogonale Q_1 telle que $Q_1 M$ soit de la forme $\begin{pmatrix} \alpha_1 & B_1 \\ 0 & M_1 \end{pmatrix}$ où $M_1 \in \mathcal{M}_{n-1,p-1}(\mathbb{R})$, $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ et $B_1 \in \mathcal{M}_{1,p-1}(\mathbb{R})$ (on pourra utiliser la question précédente).

b) En déduire l'existence d'une matrice orthogonale Q et d'une matrice triangulaire supérieure R telles que $M = QR$.

3) Donner, en utilisant la méthode précédemment décrite, une décomposition de M sous la forme $M = QR$ avec Q orthogonale et R triangulaire supérieure lorsque

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

4) Démontrer que toute matrice orthogonale $n \times n$ est le produit d'au plus n matrices de Householder. Quelle interprétation géométrique peut-on faire de ce résultat ?