Préparation au CAPES de Mathématiques

Corrigé rapide du problème de géométrie n°1

Partie 1

1) Soient $\vec{u} \neq \vec{v} \in \overrightarrow{\mathcal{P}} - \{0\}$. On peut par hypothèse écrire $\vec{f}(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$ et $\vec{f}(v) = \mu\vec{v}$. (*Rappel : deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\vec{v} = \vec{0}$ ou $\exists\lambda \in \mathbb{K}$, $\vec{u} = \lambda\vec{v}$; ici, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant non nuls, la caractérisation est bonne ...*) Supposons $\lambda \neq \mu$. On a alors $sp(\vec{f}) = \{\lambda, \mu\}$ ($\vec{f}$ ne peut avoir plus de deux valeurs propres distinctes). Or, par hypothèse, $\vec{f}(\vec{u}+\vec{v})$ est de la forme $\gamma(\vec{u}+\vec{v})$ et $\vec{u}+\vec{v} \neq \vec{0}$ (car $\lambda \neq \mu$) donc $\gamma \in sp(\vec{f})$. On a donc par exemple $\gamma = \lambda$ et $\gamma(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{f}(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{f}(\vec{u}) + \vec{f}(\vec{v})$ donne $\lambda\vec{v} = \mu\vec{v}$ soit $\lambda = \mu$.

<u>Autre méthode :</u> Fixons $u \in \overrightarrow{\mathcal{P}}\backslash\{0\}$ *(cela n'est pas restrictif puisque, f étant linéaire, $f(\vec{0}) = \lambda\vec{0}$ pour tout λ de $\mathbb{K}$).* On a donc : $\exists\lambda \in \mathbb{R}$, $f(u) = \lambda u$. Fixons un tel λ. Soit alors $v \in E\backslash\{0\}$.

- Si v est colinéaire à u, on peut écrire $v = \alpha u$ donc $f(v) = \alpha f(u) = \alpha\lambda u = \lambda v$.

- Sinon, la propriété précédente permet d'affirmer : $\exists\mu \in \mathbb{R}$, $f(v) = \mu v$ et $\exists\gamma \in \mathbb{R}$, $f(u+v) = \gamma(u+v)$ d'où $\gamma(u+v) = f(u) + f(v) = \lambda u + \mu v$ soit $(\gamma - \lambda)u = (\mu - \gamma)v$. On déduit alors $\gamma = \mu = \lambda$.

Finalement, $\forall x \in E$, $f(x) = \lambda x$ et f est une homothétie vectorielle.

2) Les homothéties-translations du plan sont exactement les applications affines du plan transformant toute droite en une droite parallèle.

Partie 2 *On remarque que dans cette partie f n'est nullement supposée affine.*

1) f a au moins deux points fixes distincts O_1 et O_2. Soit alors $M \notin (O_1O_2)$. $f((MO_1))$ est une droite passant par O_1 et parallèle à (MO_1) donc $f((MO_1)) = (MO_1)$. De même $f((MO_2)) = (MO_2)$ et par suite $f(M) = M$. Enfin, si $N \in (O_1O_2)$, on fixe un point $M \notin (O_1O_2)$ et le point précédent montre que $f(M) = M$. On a alors alors $N \notin (MO_2)$ et on a donc de même $f(N) = N$ ce qui prouve que f est l'identité.

2) f admet exactement un point fixe O. Fixons un point $A \neq O$. Soit M tel que $M \notin (OA)$. Les droites passant par O sont toutes globalement invariantes donc O, M, $f(M)$ sont alignés, $(f(M)f(A)) /\!/ (MA)$ et O, A, $f(A)$ sont alignés. Le théorème de Thalès assure alors que $\overrightarrow{Of(M)} = k\overrightarrow{OM}$ où $k = \dfrac{\overline{Of(A)}}{\overline{OA}}$.

Enfin, si $M \in (OA)$, on fixe un autre point $A' \notin (OA)$ et on applique le même raisonnement. Finalement, f est l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{\overline{Of(A)}}{\overline{OA}}$.

3) f n'a pas de point fixe. Fixons un point O et considérons la translation t de vecteur $\overrightarrow{f(O)O}$. $g = t \circ f$ conserve encore le parallélisme (évident par propriété des translations) et admet au moins O comme point fixe donc est, d'après ce qui précède, une homothétie-translation. f en est donc aussi une.

Finalement, les homothéties-translations sont exactement les bijections du plan qui transforment toute droite en une droite parallèle.