Préparation au CAPES de Mathématiques

Problème de géométrie n°1

A rendre pour le jeudi 18 septembre 2008

Dans tout le problème, $\mathcal{P}$ désigne le plan affine réel.

On rappelle qu'une homothétie-translation du plan est une application affine dont l'application linéaire associée est de la forme $\lambda Id_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$).

Partie 1 : Applications affines du plan transformant une droite en une droite parallèle

1) Soit $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{\mathcal{P}} \longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{P}}$ une application linéaire transformant tout vecteur en un vecteur colinéaire. Montrer qu'il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{f}$ soit de la forme $\lambda Id_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}$.

2) En déduire une caractérisation des homothéties-translations du plan.

Partie 2 : Bijections du plan transformant une droite en une droite parallèle

Soit $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ une bijection transformant toute droite de $\mathcal{P}$ en une droite parallèle.

1) On suppose que f admet deux points fixes distincts O_1 et O_2. Montrer que f est l'identité.

2) On suppose que f admet exactement un point fixe. Montrer que f est une homothétie.

3) On suppose que f n'a pas de point fixe. Soient O un point de $\mathcal{P}$ et t la translation de vecteur $\overrightarrow{f(O)O}$.

Vérifier que $g = t \circ f$ conserve encore le parallélisme. Qu'en déduit-on pour f ?

Énoncer un théorème résumant cette partie.