UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et Géométrie 1

Corrigé rapide de l'exercice à rendre pour le 7 décembre 2017

Exercice

1)a) Soient $(x,y) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour montrer que $f(x+\lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$, on va montrer que le vecteur $f(x+\lambda y) - f(x) - \lambda f(y)$ est nul en montrant que ce vecteur est de norme nulle. Par bilinéarité du produit scalaire,

$$\begin{aligned}\|f(x+\lambda y) - f(x) - \lambda f(y)\|^2 &= \|f(x+\lambda y)\|^2 + \|f(x)\|^2 + \lambda^2\|f(y)\|^2 - 2 < f(x+\lambda y),\, f(x) > \\ &\quad -2\lambda < f(x+\lambda y),\, f(y) > +2\lambda < f(x),\, f(y) >\end{aligned}$$

Or f conserve le produit scalaire (et donc aussi la norme car $\|x\|^2 = <x,\, x>$) donc

$$\begin{aligned}\|f(x+\lambda y) - f(x) - \lambda f(y)\|^2 &= \|x+\lambda y\|^2 + \|x\|^2 + \lambda^2\|y\|^2 - 2 < x+\lambda y,\, x > \\ &\quad -2\lambda < x+\lambda y,\, y > +2\lambda < x,\, y > \\ &= \|x+\lambda y - x - \lambda y\|^2 = 0\end{aligned}$$

et donc $f(x+\lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$. f est bien linéaire.

b) Soit $x \in E$. Comme $\|f(x)\| = \|x\|$, on a $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et l'endomorphisme f est injectif. E étant de dimension finie, on en déduit que f est bijectif.

c) Soit donc F un sous-espace vectoriel de E. Montrons que $f(F^\perp) \subset f(F)^\perp$. Soit $y \in f(F^\perp)$: on peut alors écrire $y = f(x)$ pour un certain x de $F^\perp$. Soit d'autre part $z \in f(F)$: on peut écrire $z = f(x')$ pour un certain x de F. Mais alors $<y,\, z> = <f(x),\, f(x')> = <x,\, x'>$ (car f est un automorphisme orthogonal) et donc $<y,\, z> = 0$ (car $x \in F^\perp$ et $x' \in F$). On a montré : $\forall z \in f(F),\ <y,\, z> = 0$. Cela signifie que $y \in f(F)^\perp$ et finalement $f(F^\perp) \subset f(F)^\perp$.
On peut alors conclure :
• ou bien par un argument de dimension : $\dim f(F)^\perp = \dim E - \dim f(F) = \dim E - \dim F$ car f est bijective donc $\dim f(F)^\perp = \dim F^\perp = \dim f(F^\perp)$.
• ou bien en montrant l'inclusion réciproque : soit $y \in f(F)^\perp$. La surjectivité de f permet de considérer un x de E tel que $y = f(x)$ et on montre pour conclure que $x \in F^\perp$. Soit donc $z \in F$.
$<x,\, z> = <f(x),\, f(z)> = <y,\, f(z)> = 0$ car $f(z) \in f(F)$. On a bien $y = f(x) \in f(F^\perp)$.

d) Non. Par exemple, l'homothétie $h_2 : x \longmapsto 2x$ conserve l'orthogonalité (clair) et ne conserve pourtant pas le produit scalaire puisque, pour $<x,\, y> \neq 0$, on a $<h_2(x),\, h_2(y)> = 4 <x,\, y> \neq <x,\, y>$.

2) Il est clair que $\mathscr{O}(E)$ est une partie non vide (car contenant l'identité) de $GL(E)$ stable par composition. Enfin, si f est un automorphisme orthogonal, pour tout (x,y) de E^2 on a

$$<f^{-1}(x),\, f^{-1}(y)> = <f\left[f^{-1}(x)\right],\, f\left[f^{-1}(y)\right]> \quad \text{car } f \text{ conserve le produit scalaire}$$

et donc $<f^{-1}(x),\, f^{-1}(y)> = <x,\, y>$ et f^{-1} est bien dans $\mathscr{O}(E)$.

3) Soient $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ une base orthonormée et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.
$<f(e_1),\, f(e_1> = <e_1,\, e_1> = 1$ donc $a^2 + c^2 = 1$. De même $b^2 + d^2 = 1$.
Enfin, $<f(e_1),\, f(e_2> = <e_1,\, e_2> = 0$ donc $ab + cd = 0$. La surjectivité de la fonction cosinus de $\mathbb{R}$ dans $[-1,1]$ assure alors l'existence d'un réel θ tel que $a = \cos\theta$ et $c = \sin\theta$ et de même l'existence d'un réel φ tel que $b = \cos\varphi$ et $d = \sin\varphi$. L'égalité $ab + cd = 0$ s'écrit alors $\cos(\theta - \varphi) = 0$ soit $\varphi = \theta - \frac{\pi}{2} - k\pi$ et le résultat annoncé en découle.