Algèbre et Géométrie 1

Exercice à rendre pour le 7 décembre 2017

Soit E un espace vectoriel euclidien.

1) Soit $f : E \longrightarrow E$ une application qui conserve le produit scalaire : $\forall (x, y) \in E^2 \ \ < f(x), \, f(y) > = < x, \, y >$.

a) Montrer que f est linéaire.

b) Montrer que f est bijective.

Une application qui conserve le produit scalaire est donc un ***automorphisme orthogonal*** de E.

c) Montrer que pour tout sous-espace vectoriel F de E on a $f(F^{\perp}) = f(F)^{\perp}$.

d) Suffit-il à une application $f : E \longrightarrow E$ de conserver l'orthogonalité pour être un automorphisme orthogonal ?

2) Montrer que l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E est un groupe pour la composition des applications. Ce groupe est appelé ***groupe orthogonal*** de E et noté $\mathscr{O}(E)$.

3) Soit f un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^2$. Montrer que la matrice de f dans une base orthonormée est de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\varepsilon \sin\theta \\ \sin\theta & \varepsilon \cos\theta \end{pmatrix}$ où $\theta \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \{\pm 1\}$.

Master 1 MEEF - Parcours Mathématiques 2017-2018

Algèbre et Géométrie 1

Exercice à rendre pour le 7 décembre 2017

Soit E un espace vectoriel euclidien.

4) Soit $f : E \longrightarrow E$ une application qui conserve le produit scalaire : $\forall (x, y) \in E^2 \ \ < f(x), \, f(y) > = < x, \, y >$.

a) Montrer que f est linéaire.

b) Montrer que f est bijective.

Une application qui conserve le produit scalaire est donc un ***automorphisme orthogonal*** de E.

c) Montrer que pour tout sous-espace vectoriel F de E on a $f(F^{\perp}) = f(F)^{\perp}$.

d) Suffit-il à une application $f : E \longrightarrow E$ de conserver l'orthogonalité pour être un automorphisme orthogonal ?

5) Montrer que l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E est un groupe pour la composition des applications. Ce groupe est appelé ***groupe orthogonal*** de E et noté $\mathscr{O}(E)$.

6) Soit f un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^2$. Montrer que la matrice de f dans une base orthonormée est de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\varepsilon \sin\theta \\ \sin\theta & \varepsilon \cos\theta \end{pmatrix}$ où $\theta \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \{\pm 1\}$.