UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et Géométrie 1

Exercice à rendre pour le 30 novembre 2017

Exercice

Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ deux espaces affines réels de dimensions finies et f une application de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{B}$.

1) On suppose que f est affine d'application linéaire associée $\overrightarrow{f}$. Montrer que f conserve les barycentres, c'est à dire que, pour toute famille finie $(A_i, \alpha_i)_{(1 \leqslant i \leqslant n)}$ (avec $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$) de points pondérés de $\mathscr{A}$, si G est le barycentre de cette famille alors $f(G)$ est le barycentre de la famille $(f(A_i), \alpha_i)_{(1 \leqslant i \leqslant n)}$.

2) On suppose dans cette question que f conserve les barycentres. Soit $A \in \mathscr{A}$. Notons $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{\mathscr{A}} \longrightarrow \overrightarrow{\mathscr{B}}$ l'application définie, pour tout $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AM}$ de $\overrightarrow{\mathscr{A}}$, par $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{f(A)f(M)}$.

- Soient $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AN}$ dans $\overrightarrow{\mathscr{A}}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit P le point de $\mathscr{A}$ tel que $\overrightarrow{u} + \alpha\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AP}$. Écrire P comme barycentre de A, M et N.
- En déduire que $\overrightarrow{f}$ est linéaire.

3) Énoncer un résultat résumant les deux questions précédentes.