

GA2 - Algèbre

Exercice à rendre pour le jeudi 23 mars 2023

Dans tout le problème, p est un nombre premier fixé.

Partie 1 : Valuation p -adique

- 1) Montrer que, pour tout rationnel non nul x , il existe un unique entier relatif k tel que x s'écrive sous la forme $x = p^k \frac{a}{b}$ où a et b sont des entiers non multiples de p .

Cet entier k est noté $v_p(x)$ et appelé **valuation p -adique** de x .

On pose de plus $v_p(0) = +\infty$. On définit ainsi une application v_p de \mathbb{Q} dans $\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$.

- 2) À quoi correspond la valuation p -adique d'un entier $n \geq 2$?
- 3) Montrer que l'application v_p est surjective. Est-elle bijective ? Décrire $v_p^{-1}(\{0\})$.
- 4) Soit x et y dans \mathbb{Q} . Montrer que $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$.

Partie 2 : Formule de Legendre

- 1) Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Montrer que le cardinal de l'ensemble $\{j \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq n, v_p(j) = k\}$ est égal à $\left[\frac{n}{p^k} \right] - \left[\frac{n}{p^{k+1}} \right]$ où $[x]$ désigne la partie entière du réel x .
- 2) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_p(n!) = \sum_{k \geq 1} \left[\frac{n}{p^k} \right]$ (*formule de Legendre*)
- 3) Par combien de « 0 » se termine l'écriture décimale du nombre 2023! ?