UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et Géométrie 1

Corrigé rapide de l'exercice à rendre pour le 16 octobre 2018

Exercice

1) Si $\lambda = 0$, pour tout point M on a $\overrightarrow{p(M)a(M)} = \overrightarrow{0}$ soit $a(M) = p(M)$ et donc a est la projection sur E parallèlement à $\overrightarrow{F}$. Si $\lambda = 1$, pour tout point M on a $\overrightarrow{p(M)a(M)} = \overrightarrow{p(M)M}$ soit $a(M) = M$ et donc a est l'identité de X. Enfin, si $\lambda = -1$, pour tout point M on a $\overrightarrow{p(M)a(M)} = -\overrightarrow{p(M)M}$ et $p(M)$ est le milieu de $[Ma(M)]$: a est la symétrie par rapport à E dans la direction $\overrightarrow{F}$.
Si $\overrightarrow{E} = \{\overrightarrow{0}\}$ et $\lambda \neq 0$, alors E, s.e.a. de dimension 0, est réduit à un point : $E = \{\Omega\}$ et pour tout point M de X on a $p(M) = \Omega$. L'égalité $\overrightarrow{p(M)a(M)} = \lambda\overrightarrow{p(M)M}$ s'écrit donc $\overrightarrow{\Omega a(M)} = \lambda\overrightarrow{\Omega M}$. a est donc l'homothétie de centre Ω et de rapport λ.

2) Fixons un point A de E. Pour tout point M on a $\overrightarrow{a(A)a(M)} = \overrightarrow{a(A)p(A)} + \overrightarrow{p(A)p(M)} + \overrightarrow{p(M)a(M)}$ soit $\overrightarrow{a(A)a(M)} = -\lambda\overrightarrow{p(A)A} + \overrightarrow{p}(\overrightarrow{AM}) + \lambda\overrightarrow{p(M)M}$ où $\overrightarrow{p}$ est l'application linéaire associée à l'application affine p. On a donc $\overrightarrow{a(A)a(M)} = \overrightarrow{p}(\overrightarrow{AM}) + \lambda\overrightarrow{p(M)M}$ car $p(A) = A$. On en déduit encore

$$\overrightarrow{a(A)a(M)} = \overrightarrow{p}(\overrightarrow{AM}) + \lambda\overrightarrow{p(M)p(A)} + \lambda\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{p}(\overrightarrow{AM}) - \lambda\overrightarrow{p}(\overrightarrow{AM}) + \lambda\overrightarrow{AM}$$

Soit finalement, $\overrightarrow{a(A)a(M)} = \left((1-\lambda)\overrightarrow{p} + \lambda id_{\overrightarrow{X}}\right)(\overrightarrow{AM})$.
Comme $(1-\lambda)\overrightarrow{p} + \lambda id_{\overrightarrow{X}}$ est linéaire (comme combinaison linéaire de telles applications), cela prouve que a est une application affine d'application vectorielle associée $\overrightarrow{a} = (1-\lambda)\overrightarrow{p} + \lambda id_{\overrightarrow{X}}$.
Soit $M \in X$. $a(M) = M \Leftrightarrow \overrightarrow{p(M)a(M)} = \overrightarrow{p(M)M}$ donc $a(M) = M \Leftrightarrow \lambda\overrightarrow{p(M)M} = \overrightarrow{p(M)M}$. Par suite, ou bien $\lambda = 1$ et tous les points de X sont fixes ou bien $\lambda \neq 1$ et l'ensemble des points fixes de a est le même que celui de p : E.

3) Si $\lambda = 0$, $a = p$ n'est pas bijective (le cas où $F = \{\overrightarrow{0}\}$ est exclu). Si $\lambda \neq 0$, en posant $\overrightarrow{a'} = (1-\frac{1}{\lambda})\overrightarrow{p} + \frac{1}{\lambda}id_{\overrightarrow{X}}$, on a $\overrightarrow{a'} \circ \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{a'} = id_{\overrightarrow{X}}$ donc $\overrightarrow{a}$ est inversible et a est bijective. a^{-1} ayant bien sûr même ensemble d'invariants que a, on déduit : a^{-1} est l'affinité de base E, de direction $\overrightarrow{F}$ et de rapport $\dfrac{1}{\lambda}$.
Autre solution : si $M' = a(M)$, on vérifie que $p(M') = p(M)$ et on a alors $\overrightarrow{p(M')M} = \frac{1}{\lambda}\overrightarrow{p(M')M'}$...

4) La transformation proposée admet la droite (E) d'équation $y = x$ comme ensemble de points fixes. D'autre part, si M' est l'image de M, on a $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} 3(x-y) \\ x-y \end{pmatrix} \in \overrightarrow{F}$ où $\overrightarrow{F}$ est la droite vectorielle d'équation $x = 3y$. Il s'agit de l'affinité d'axe $(y = x)$, de direction $(x = 3y)$ et de rapport 3.
En effet, si $M_0(x_0, y_0)$, le projeté de M_0 sur E parallèlement à $\overrightarrow{F}$ est le point d'intersection de la parallèle à $\overrightarrow{F}$ passant par M_0 (d'équation $x - x_0 = 3(y - y_0)$) avec E donc $p(M_0)\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x_0 + \frac{3}{2}y_0 \\ -\frac{1}{2}x_0 + \frac{3}{2}y_0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{p(M_0)M_0}\begin{pmatrix} \frac{3}{2}(x_0 - y_0) \\ \frac{1}{2}(x_0 - y_0) \end{pmatrix}$. Par suite, $\overrightarrow{p(M_0)M_0'}\begin{pmatrix} 4x_0 - 3y_0 + \frac{1}{2}x_0 - \frac{3}{2}y_0 = \frac{9}{2}(x_0 - y_0) \\ x_0 + \frac{1}{2}x_0 - \frac{3}{2}y_0 = \frac{3}{2}(x_0 - y_0) \end{pmatrix} = 3\overrightarrow{p(M_0)M_0}$.