Algèbre et Géométrie 1

Exercice à rendre pour le 16 octobre 2018

Exercice

Soit X un espace affine réel d'espace vectoriel associé $\overrightarrow{X}$. Étant donnés un réel λ et deux sous-espaces affines E et F d'espaces vectoriels associés supplémentaires dans $\overrightarrow{X}$ ($\overrightarrow{E} \oplus \overrightarrow{F} = \overrightarrow{X}$), on appelle affinité de base E, de direction $\overrightarrow{F}$ et de rapport λ l'application $a : X \longrightarrow X$ définie par $\forall M \in X$, $\overrightarrow{p(M)a(M)} = \lambda\overrightarrow{p(M)M}$ où p est la projection sur E parallèlement à $\overrightarrow{F}$.

1) Préciser la nature de l'affinité de base E, de direction $\overrightarrow{F}$ et de rapport λ lorsque $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$. Faire de même lorsque $\overrightarrow{E} = \{\overrightarrow{0}\}$ et $\lambda \neq 0$.

2) Montrer que, dans le cas général, a est une application affine dont on déterminera l'application linéaire associée. Déterminer l'ensemble de ses points fixes.

3) Montrer qu'une affinité distincte de l'identité est bijective si et seulement si son rapport est non nul. Déterminer dans ce cas la nature de son inverse.

4) Le plan affine étant rapporté à un repère orthonormal, déterminer la nature de la transformation

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto M'\begin{pmatrix} x' = 4x - 3y \\ y' = x \end{pmatrix}$$

Master 1 MEEF - Parcours Mathématiques 2018-2019

Algèbre et Géométrie 1

Exercice à rendre pour le 16 octobre 2018

Exercice

Soit X un espace affine réel d'espace vectoriel associé $\overrightarrow{X}$. Étant donnés un réel λ et deux sous-espaces affines E et F d'espaces vectoriels associés supplémentaires dans $\overrightarrow{X}$ ($\overrightarrow{E} \oplus \overrightarrow{F} = \overrightarrow{X}$), on appelle affinité de base E, de direction $\overrightarrow{F}$ et de rapport λ l'application $a : X \longrightarrow X$ définie par $\forall M \in X$, $\overrightarrow{p(M)a(M)} = \lambda\overrightarrow{p(M)M}$ où p est la projection sur E parallèlement à $\overrightarrow{F}$.

5) Préciser la nature de l'affinité de base E, de direction $\overrightarrow{F}$ et de rapport λ lorsque $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$. Faire de même lorsque $\overrightarrow{E} = \{\overrightarrow{0}\}$ et $\lambda \neq 0$.

6) Montrer que, dans le cas général, a est une application affine dont on déterminera l'application linéaire associée. Déterminer l'ensemble de ses points fixes.

7) Montrer qu'une affinité distincte de l'identité est bijective si et seulement si son rapport est non nul. Déterminer dans ce cas la nature de son inverse.

8) Le plan affine étant rapporté à un repère orthonormal, déterminer la nature de la transformation

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto M'\begin{pmatrix} x' = 4x - 3y \\ y' = x \end{pmatrix}$$