Préparation au CAPES de Mathématiques

Corrigé rapide du problème de géométrie n°1

1) Si $\lambda = 0$, pour tout point M on a $\overrightarrow{p(M)a(M)} = \vec{0}$ et donc a est la projection sur E parallèlement à $\overrightarrow{F}$. Si $\lambda = 1$, pour tout point M on a $\overrightarrow{p(M)a(M)} = \overrightarrow{p(M)M}$ et donc a est l'identité de X. Enfin, si $\lambda = -1$, pour tout point M on a $\overrightarrow{p(M)a(M)} = -\overrightarrow{p(M)M}$ et $p(M)$ est le milieu de $[Ma(M)]$: a est la symétrie par rapport à E dans la direction $\overrightarrow{F}$.

Si $\overrightarrow{E} = \{\vec{0}\}$ et $\lambda \neq 0$, alors E est réduit à un point : $E = \{\Omega\}$ et pour tout point M on a $\overrightarrow{p(M)a(M)} = \lambda\overrightarrow{p(M)M}$ soit $\overrightarrow{\Omega a(M)} = \lambda\overrightarrow{\Omega M}$. a est donc l'homothétie de centre Ω et de rapport λ.

2) Fixons un point A de E. Pour tout point M on a $\overrightarrow{a(A)a(M)} = \overrightarrow{a(A)p(A)} + \overrightarrow{p(A)p(M)} + \overrightarrow{p(M)a(M)}$ soit $\overrightarrow{a(A)a(M)} = -\lambda\overrightarrow{p(A)A} + \vec{p}(\overrightarrow{AM}) + \lambda\overrightarrow{p(M)M} = \vec{p}(\overrightarrow{AM}) + \lambda\overrightarrow{p(M)M}$ car $p(A) = A$. On en déduit encore $\overrightarrow{a(A)a(M)} = \vec{p}(\overrightarrow{AM}) + \lambda\overrightarrow{p(M)p(A)} + \lambda\overrightarrow{AM} = \vec{p}(\overrightarrow{AM}) - \lambda\vec{p}(\overrightarrow{AM}) + \lambda\overrightarrow{AM}$. Finalement, $\overrightarrow{a(A)a(M)} = \left((1-\lambda)\vec{p} + \lambda id_{\vec{X}}\right)(\overrightarrow{AM})$. Cela montre que a est une application affine d'application vectorielle associée $\vec{a} = (1-\lambda)\vec{p} + \lambda id_{\vec{X}}$.

Soit $M \in X$. $a(M) = M \Leftrightarrow \overrightarrow{p(M)a(M)} = \overrightarrow{p(M)M}$ donc $a(M) = M \Leftrightarrow \lambda\overrightarrow{p(M)M} = \overrightarrow{p(M)M}$. Par suite, ou bien $\lambda = 1$ et tous les points de X sont fixes ou bien $\lambda \neq 1$ et l'ensemble des points fixes de a est le même que celui de p : E.

3) Si $\lambda = 0$, $a = p$ n'est pas bijective (le cas où $F = \{\vec{0}\}$ est clu). Si $\lambda \neq 0$, en posant $\vec{a'} = (1 - \frac{1}{\lambda})\vec{p} + \frac{1}{\lambda}id_{\vec{X}}$, on a $\vec{a'} \circ \vec{a} = \vec{a} \circ \vec{a'} = id_{\vec{X}}$ donc $\vec{a}$ est inversible et a est bijective. a^{-1} ayant bien sûr même ensemble d'invariants que a, on déduit : a^{-1} est l'affinité de base E, de direction $\overrightarrow{F}$ et de rapport $\dfrac{1}{\lambda}$.

Autre solution : si $M' = a(M)$ alors $p(M') = p(M)$ et par suite $\overrightarrow{p(M')M} = \frac{1}{\lambda}\overrightarrow{p(M')M'}$.

4) Soient a et a' deux affinités de même direction et de bases parallèles. On a alors $\vec{p} = \vec{p'}$ et donc $\vec{a} \circ \vec{a'} = \left((1-\lambda)\vec{p} + \lambda id_{\vec{X}}\right) \circ \left((1-\lambda)\vec{p} + \lambda id_{\vec{X}}\right) = (1 - \lambda\lambda')\vec{p} + \lambda\lambda' id_{\vec{X}}$.

- ou bien $\lambda\lambda' = 1$ et $\vec{a} \circ \vec{a'} = id_{\vec{X}}$. L'application affine $f = a \circ a'$ est alors une translation : si on fixe A dans X et que l'on pose $\vec{u} = \overrightarrow{Af(A)}$, on a pour tout point M, $\overrightarrow{Mf(M)} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{Af(A)} + \overrightarrow{f(A)f(M)} = \overrightarrow{MA} + \vec{u} + \overrightarrow{AM} = \vec{u}$. Si on prend en particulier $A \in E'$, on constate que $\vec{u} = \overrightarrow{Af(A)} = \overrightarrow{Aa(A)} \in \vec{F}$

- ou bien $\lambda\lambda' \neq 1$. Pour montrer que $a \circ a'$ (dont on connaît l'application vectorielle associée) est une affinité toujours de même direction, de base parallèle à celles de a et a' et de rapport $\lambda\lambda'$, il suffit de vérifier que $a \circ a'$ a au moins un point fixe.

  Pour $N \in X$, notons $\vec{v} = \overrightarrow{p(N)p'(N)}$: ce vecteur est indépendant du choix de N car $\vec{p} = \vec{p'}$. Soit alors $M \in X$. On a $p[a'(M)] = p(M)$ car $\overrightarrow{Ma'(M)} \in \vec{F}$ d'où :

$$
\begin{aligned}
a\circ a'(M)=M &\iff \overrightarrow{p(M)a[a'(M)]}=\overrightarrow{p(M)M}\\
&\iff \overrightarrow{p[a'(M)]a[a'(M)]}=\overrightarrow{p(M)M}\\
&\iff \lambda\overrightarrow{p(M)a'(M)}=\overrightarrow{p(M)M}\\
&\iff \lambda\overrightarrow{p(M)p'(M)}+\lambda\lambda'\overrightarrow{p'(M)M}=\overrightarrow{p(M)p'(M)}+\overrightarrow{p'(M)M}\\
&\iff (1-\lambda\lambda')\overrightarrow{p'(M)M}=(\lambda-1)\vec{v}
\end{aligned}
$$

Si on fixe $A'\in E'$, le point M tel que $\overrightarrow{A'M}=\frac{\lambda-1}{\lambda}\vec{v}$ est alors fixe pour $a\circ a'$ (car alors $p'(M)=A'$).

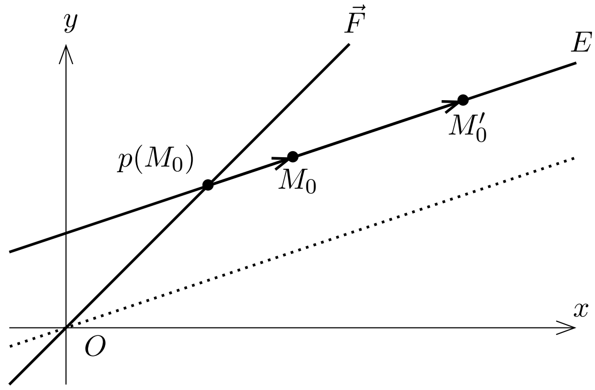
5) Montrons que c'est un sous-groupe du groupe affine de X. La stabilité par passage à l'inverse résulte de 3) (et de $(t_{\vec{u}})^{-1}=t_{-\vec{u}}$). La stabilité par composition résulte de 4) dans le cas de deux affinités et de $t_{\vec{u}}\circ t_{\vec{u'}}=t_{\vec{u}+\vec{u'}}$ dans le cas de deux translations. Enfin, si a est l'affinité de base E, de direction $\overrightarrow{F}$ et de rapport λ et si $\vec{u}\in\overrightarrow{F}$, $t_{\vec{u}}\circ a$ est une application affine d'endomorphisme associé $(1-\lambda)\vec{p}+\lambda id_{\vec{X}}$. De plus, $t_{\vec{u}}\circ a(M)=M$ si et seulement si $\overrightarrow{a(M)M}=\vec{u}$ c'est à dire $\overrightarrow{a(M)p(M)}+\overrightarrow{p(M)M}=\vec{u}$ soit encore $(1-\lambda)\overrightarrow{p(M)M}=\vec{u}$. Finalement, si $\lambda=1$ alors $t_{\vec{u}}\circ a=t_{\vec{u}}$ et sinon $t_{\vec{u}}\circ a$ est l'affinité de base $E'/\!\!/E$ et de direction $\overrightarrow{F}$. Le résultat est similaire pour $a\circ t_{\vec{u}}$.

Remarque. Ce groupe (contrairement à ce qu'affirmait le texte originel) n'est nullement commutatif.

6) La transformation proposée admet la droite (E) d'équation $y=x$ comme ensemble de points fixes. D'autre part, si M' est l'image de M, on a $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix}3(x-y)\\ x-y\end{pmatrix}\in\overrightarrow{F}$ où $\overrightarrow{F}$ est la droite vectorielle d'équation $x=3y$. Il s'agit de l'affinité d'axe $(y=x)$, de direction $(x=3y)$ et de rapport 3.

En effet, si $M_0(x_0,y_0)$, le projeté de M_0 sur E parallèlement à $\vec{F}$ est le point d'intersection de la parallèle à $\vec{F}$ passant par M_0 (d'équation $x-x_0=3(y-y_0)$) avec E donc $p(M_0)\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}x_0+\frac{3}{2}y_0\\ -\frac{1}{2}x_0+\frac{3}{2}y_0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{p(M_0)M_0}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}(x_0-y_0)\\ \frac{1}{2}(x_0-y_0)\end{pmatrix}$.

Par suite, $\overrightarrow{p(M_0)M_0'}\begin{pmatrix}4x_0-3y_0+\frac{1}{2}x_0-\frac{3}{2}y_0=\frac{9}{2}(x_0-y_0)\\ x_0+\frac{1}{2}x_0-\frac{3}{2}y_0=\frac{3}{2}(x_0-y_0)\end{pmatrix}=3\overrightarrow{p(M_0)M_0}$.



Autre méthode : $\begin{pmatrix}4&-3\\1&0\end{pmatrix}$ est diagonalisable, de valeurs propres 1 et 3. Dans la base $\{(1,1),(3,1)\}$, la matrice de la transformation proposée est donc $\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$ et le résultat annoncé en découle ...