Université de Rennes 1 **2009-2010**

Préparation au CAPES de Mathématiques

Problème de géométrie n°1

A rendre pour le jeudi 12 novembre 2009

Soit X un espace affine réel d'espace vectoriel associé $\overrightarrow{X}$. Étant donnés un réel λ et deux sous-espaces affines E et F d'espaces vectoriels associés supplémentaires dans $\overrightarrow{X}$ ($\overrightarrow{E} \oplus \overrightarrow{F} = \overrightarrow{X}$), on appelle affinité de base E, de direction $\overrightarrow{F}$ et de rapport λ l'application $a : X \to X$ définie par $\forall M \in X$, $\overrightarrow{p(M)a(M)} = \lambda \overrightarrow{p(M)M}$ où p est la projection sur E parallèlement à $\overrightarrow{F}$.

1) Préciser la nature de l'affinité de base E, de direction $\overrightarrow{F}$ et de rapport λ lorsque $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$. Faire de même lorsque $\overrightarrow{E} = \{\vec{0}\}$ et $\lambda \neq 0$.

2) Montrer que a est une application affine dont on déterminera l'application linéaire associée. Déterminer l'ensemble de ses points fixes.

3) Montrer qu'une affinité distincte de l'identité est bijective si et seulement si son rapport est non nul. Déterminer dans ce cas la nature de son inverse.

4) Montrer que la composée de deux affinités de même direction et de bases parallèles est une affinité où une translation dont on précisera alors le vecteur.

5) Montrer que la réunion de l'ensemble des affinités de même direction $\overrightarrow{F}$, de bases parallèles et de rapport non nul avec l'ensemble des translations de vecteur $\vec{u} \in \overrightarrow{F}$ est un groupe.

6) Le plan affine étant rapporté à un repère orthonormal, déterminer la nature de la transformation

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto M' \begin{pmatrix} x' = 4x - 3y \\ y' = x \end{pmatrix}$$