PRA2 - Probabilités - Analyse - Statistiques : Corrigé rapide du contrôle continu

Exercice n°1 (*4,5 points*)

1) $f : t \longmapsto \dfrac{2\sqrt{t}\cos t}{3+t^2}$ est continue donc localement intégrable sur $[0,+\infty[$ et on a $\forall t>0,\ |f(t)| \leqslant \dfrac{2\sqrt{t}}{t^2} = \dfrac{2}{t^{\frac{3}{2}}}$ or $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}}$ converge (intégrale de Riemann avec $\frac{3}{2} > 1$) donc (théorème de comparaison pour les fonctions positives) $\displaystyle\int^{+\infty} |f|$ converge. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2\sqrt{t}\cos t}{3+t^2}\,dt$ converge donc (absolument).

2) $g : x \longmapsto \dfrac{\sin(x+1)}{\sqrt{x}}$ est continue donc localement intégrable sur $]0,+\infty[$. On a $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\sin(1)}{\sqrt{x}}$ et $\displaystyle\int_0 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ converge (intégrale de Riemann avec $\frac{1}{2} < 1$) et donc (théorème d'équivalence pour les fonctions positives) $\displaystyle\int_0 g$ converge.

Soit $X>1$. $x \mapsto -\cos(x+1)$ et $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sont de classe C^1 sur $[1,X]$ donc (théorème d'intégration par parties), $\displaystyle\int_1^X g = \left[\frac{-\cos(x+1)}{\sqrt{x}}\right]_1^X - \frac{1}{2}\int_1^X \frac{\cos(x+1)}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$. Or, $\left|\dfrac{\cos(x+1)}{x^{\frac{3}{2}}}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ et $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ converge (intégrale de Riemann) donc $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{\cos(x+1)}{x^{\frac{3}{2}}}\,dt$ converge (absolument).

D'autre part $\left|\dfrac{-\cos(X+1)}{\sqrt{X}}\right| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{X}} \xrightarrow[X\to+\infty]{} 0$ donc finalement $\displaystyle\int_1^X g$ a une limite finie lorsque X tend vers $+\infty$. Cela prouve que $\displaystyle\int^{+\infty} g$ converge et donc finalement que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g$ converge.

Exercice n°2 (*5,5 points*)

1) Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x \neq 0$ alors $nx^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et donc $f_n(x) = \dfrac{x + \frac{1}{nx} + \frac{\ell n\,(2+nx^2)}{nx^2}}{1+\frac{1}{nx^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.
- D'autre part, $f_n(0) = \ell n\, 2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell n\, 2$.

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}$ vers $f : x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x \neq 0 \\ \ell n\, 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

2) Pour tout n de $\mathbb{N}$, f_n est continue sur $\mathbb{R}$ mais sa limite simple f ne l'est pas (f est discontinue en 0). La convergence n'est donc pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

3)
a) φ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a $\forall X>0,\ \varphi'(X) = \dfrac{\frac{X}{1+X} - \ell n\,(1+X)}{X^2}$. $\varphi'(X)$ est donc du signe de $g(X) = \dfrac{X}{1+X} - \ell n\,(1+X)$. Or g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a $\forall X>0,\ g'(X) = \dfrac{1}{(1+X)^2} - \dfrac{1}{1+X}$ soit $g'(X) = \dfrac{-X}{(1+X)^2} < 0$. g est donc décroissante sur $]0,+\infty[$ et par suite $\forall X>0,\ g(X) \leqslant g(0) = 0$ et donc $\varphi'(X) \leqslant 0$. φ est donc bien décroissante sur $]0,+\infty[$.

b) Soit $x \in [a,+\infty[$. $f_n(x) - f(x) = \dfrac{\ell n\,(2+nx^2)}{1+nx^2} = \dfrac{\ell n\,(1+(1+nx^2))}{1+nx^2}$. Compte tenu de la question précédente, on a donc $0 \leqslant f_n(x) - f(x) \leqslant \dfrac{\ell n\,(2+na^2)}{1+na^2}$ et donc $\underset{x\in[a,+\infty[}{\operatorname{Sup}} |f_n - f| \leqslant \dfrac{\ell n\,(2+na^2)}{na^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. La convergence est donc bien uniforme sur $[a,+\infty[$.

c) Ce qui précède montre que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ell n\,(2+nx^2)}{1+nx^2} = \ell n\, 2$. On en déduit que $\underset{x\in]0,+\infty[}{\operatorname{Sup}} |f_n - f| \geqslant \ell n\, 2$ et la convergence n'est donc pas uniforme sur $]0,+\infty[$ (le sup ne tend pas vers 0).

Exercice n°3 (*5 points*)

1) f est clairement positive sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}\backslash\{-\ell n\,2, \ell n\,2\}$. De plus $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f$ converge (f est nulle en dehors d'un segment sur lequel elle est continue) et on a $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f = \int_{-\ell n\,2}^{\ell n\,2} e^{-|x|}dx = 2\int_0^{\ell n\,2} e^{-x}dx$ (par parité) soit $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f = 2\left[-e^{-x}\right]_0^{\ell n\,2} = 1$. f est donc une densité de probabilité.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x < -\ell n\,2$, $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0 = 0$. Si $x > \ell n\,2$, $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f = \int_{\mathbb{R}} f = 1$. Si $0 \leqslant x \leqslant \ell n\,2$, $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\ell n\,2}^{x} f = \int_{-\ell n\,2}^{0} e^t dt + \int_0^x e^{-t}dt = \frac{1}{2} + (1 - e^{-x})$. Enfin, si $-\ell n\,2 \leqslant x < 0$, $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\ell n\,2}^{x} e^t dt$.

Finalement, $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\ell n\,2 \\ e^x - \dfrac{1}{2} & \text{si } -\ell n\,2 \leqslant x < 0 \\ \dfrac{3}{2} - e^{-x} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \ell n\,2 \\ 1 & \text{si } x > \ell n\,2 \end{cases}$

3) Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x < 0$ alors $[|X| \leqslant x] = \emptyset$ et $F_Y(x) = 0$. Sinon, $F_Y(x) = \mathbb{P}([-x \leqslant X \leqslant x]) = F_X(x) - F_X(-x)$. Compte tenu de la question précédente, on a donc : $F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2\,(1 - e^{-x}) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \ell n\,2 \\ 1 & \text{si } x > \ell n\,2 \end{cases}$

F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}\backslash\{0, \ell n\,2\}$. Y est donc une variable aléatoire à densité et une densité de Y (obtenue par dérivation) est par exemple $g : x \longmapsto \begin{cases} 2e^{-x} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \ell n\,2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice n°4 (*5 points*)

1) $\left[|X - \frac{1}{6}| \geqslant 0,01\right] = \left[\left|\frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}\right| \geqslant \frac{0,01}{\sigma(X)} = 0,06\sqrt{\frac{n}{5}}\right] = \left[\frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)} \geqslant 0,06\sqrt{\frac{n}{5}}\right] \cup \left[\frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)} \leqslant -0,06\sqrt{\frac{n}{5}}\right]$
Cette dernière réunion étant disjointe, on a alors (par continuité de Φ et propriété de symétrie)

$$\mathbb{P}\left(\left[|X - \frac{1}{6}| \geqslant 0,01\right]\right) = \mathbb{P}\left(\overline{\left[\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)} < 0,06\sqrt{\frac{n}{5}}\right]}\right) + \Phi\left(-0,06\sqrt{\frac{n}{5}}\right) = 2\left(1 - \Phi\left(0,06\sqrt{\frac{n}{5}}\right)\right)$$

Cette probabilité est inférieure à $\frac{1}{100}$ si et seulement si $\Phi\left(0,06\sqrt{\frac{n}{5}}\right) \geqslant 0,99$. La table donne alors $0,06\sqrt{\frac{n}{5}} \geqslant 2,33$ soit $n \geqslant 5\left(\frac{233}{6}\right)^2 \simeq 7540,14$. La plus petite valeur cherchée est donc $n = 7\,541$.

2)a) N est la variable aléatoire égale au nombre de succès (obtenir un six) lors de la répétition de n épreuves indépendantes de Bernoulli. N suit donc la loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{6}$ (le dé est supposé équilibré). On en déduit immédiatement $\mathbb{E}(F) = \dfrac{\mathbb{E}(N)}{n} = \dfrac{1}{6}$ et $V(F) = \frac{1}{n^2}V(N) = \frac{1}{n^2}n\frac{1}{6}\frac{5}{6}$.

b) F admettant une espérance et une variance, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}([|F - \mathbb{E}(F)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(F)}{\varepsilon^2}$$

et donc ici $\mathbb{P}([\left|F - \frac{1}{6}\right| \geqslant 0,01) \leqslant \dfrac{5}{36n \times 0,01^2}$. Pour que cette probabilité soit inférieure à 0,02, il suffit donc que l'entier n vérifie $\dfrac{5}{36n \times 0,01^2} \leqslant 0,02$ soit $n \geqslant \dfrac{5}{72.10^{-6}} \simeq 69\,444,4$. On choisit $n = 69\,445$.

c) Le théorème de De Moivre - Laplace affirme que $\dfrac{N - \mathbb{E}(N)}{\sigma(N)}$ converge en loi vers la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Compte tenu de 2)a), on peut alors approximer la loi de N par la loi $\mathcal{N}(m,\sigma)$ et la question 1) donne alors $7\,541$ comme estimation du nombre de lancers à effectuer.