UNIVERSITÉ DE RENNES 1

PRA2 : Probabilités - Analyse

Contrôle continu du jeudi 30 mars 2017

Durée : 2h

Les quatre exercices sont indépendants - Le barème est donné à titre indicatif

La qualité de la rédaction interviendra pour une large part dans l'appréciation de la copie

Exercice n°1 *(4,5 points)*

Étudier la convergence simple de chacune des intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2\sqrt{t}\cos t}{3+t^2}\,dt$ **2)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x+1)}{\sqrt{x}}\,dx$

Exercice n°2 *(5,5 points)*

Pour tout entier naturel n, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_n(x) = \dfrac{x + nx^3 + \ell n\,(2+nx^2)}{1+nx^2}$

1) Donner le domaine de convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et préciser la fonction limite.

2) La convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

3)
a) Montrer que la fonction $\varphi : X \longmapsto \dfrac{\ell n\,(1+X)}{X}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$.

b) Soit $a > 0$. Montrer que la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniforme sur l'intervalle $[a,+\infty[$.

c) La convergence est-elle uniforme sur $]0,+\infty[$?

Exercice n°3 *(5 points)*

1) Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \longmapsto \begin{cases} e^{-|x|} & \text{si } -\ell n\,2 \leqslant x \leqslant \ell n\,2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de probabilité.

2) Soit X une variable aléatoire de densité f. Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

3) On pose $Y = |X|$. Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y. En déduire que Y est une variable aléatoire à densité et donner une densité de Y.

Exercice n°4 *(5 points)*

1) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}\left(m = \frac{1}{6}, \sigma = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{5}{n}}\right)$. Exprimer, en fonction de n et de la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite, la probabilité $\mathbb{P}\left(\left[|X - \frac{1}{6}| \geqslant 0,01\right]\right)$. En déduire, à l'aide de la table jointe, la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle cette probabilité est inférieure à $0,02$.

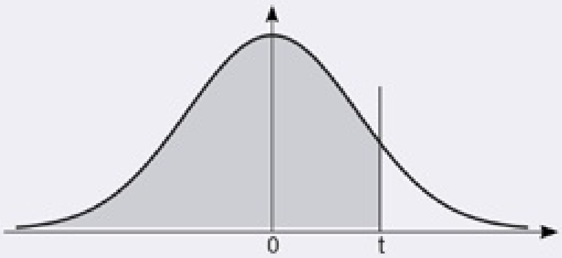
2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n lancers indépendants d'un même dé que l'on suppose équilibré et l'on note N le nombre de six obtenus lors de ces n lancers. On pose $F = \dfrac{N}{n}$.

a) Quelle est la loi de N ? Donner l'espérance et la variance de F.

b) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que $\mathbb{P}\left(\left[|F - \frac{1}{6}| \geqslant 0,01\right]\right) \leqslant \dfrac{5}{36n \times 0,01^2}$.
D'après cette l'inégalité, combien de lancers suffit-il d'effectuer pour que la fréquence d'apparition du chiffre six diffère de $\frac{1}{6}$ d'au plus $\frac{1}{100}$ avec un risque d'erreur inférieur à $\frac{2}{100}$?

c) Estimer ce même nombre en utilisant l'approximation fournie par le théorème de De Moivre - Laplace.

Table donnant P(Z<t) pour une variable aléatoire suivant N(0,1)



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Table pour les grandes valeurs

t	3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4	4,5
$\phi(t)$	0,9987	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	0,999928	0,999968	0,999997