PRA2 - Probabilités - Analyse - Statistiques : Corrigé rapide du contrôle continu

Exercice n°1 (*4 points*)

1) Soit $n \geqslant 1$. On a $|u_n| = \dfrac{1}{n\sqrt{n}+\cos(n^2)} \leqslant \dfrac{1}{n\sqrt{n}-1}$. Or, $\dfrac{1}{n\sqrt{n}-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ et $\sum \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge (série de Riemann avec $\frac{3}{2} > 1$), la série $\sum u_n$ converge donc absolument (théorème de comparaison pour les séries positives) et donc aussi simplement.

2) Soit $n \geqslant 1$. On a $X = \dfrac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $e^X - 1 \underset{X\to 0}{\sim} X$ donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$ puis $|v_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.
Comme $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (série de Riemann avec $\dfrac{1}{2} < 1$), $\sum v_n$ ne converge donc pas absolument (théorème d'équivalence pour les séries positives).
Le développement limité en 0 de $X \mapsto e^X$ à l'ordre 2 est : $e^X = 1 + X + \frac{X^2}{2} + X^2\varepsilon(X)$ avec $\lim\limits_{X\to 0} \varepsilon(X) = 0$

donc : $v_n = \dfrac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} + \dfrac{1}{8n} + \dfrac{1}{4n}\varepsilon(n)$ avec $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon(n) = 0$.

- $\sum \dfrac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$ converge d'après le critère spécial aux séries alternées (c'est une série alternée et la suite $\left(\left|\dfrac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}\right| = \dfrac{1}{2\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers 0),
- $\dfrac{1}{8n} + \dfrac{1}{4n}\varepsilon(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{8n}$ donc $\sum \left(\dfrac{1}{8n} + \dfrac{1}{4n}\varepsilon(n)\right)$ diverge.

La série $\sum v_n$ diverge donc comme somme d'une série convergente et d'une série divergente.

Exercice n°2 (*4 points*)

1) $f : t \longmapsto \dfrac{\sqrt{t}\sin t}{1+t^2}$ est continue donc localement intégrable sur $[0,+\infty[$ et on a $\forall t > 0$, $|f(t)| \leqslant \dfrac{\sqrt{t}}{t^2} = \dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$ or $\displaystyle\int^{+\infty} \dfrac{dt}{t^{\frac{3}{2}}}$ converge (intégrale de Riemann avec $\frac{3}{2} > 1$) donc (théorème de comparaison pour les fonctions positives) $\displaystyle\int^{+\infty} |f|$ converge. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\sqrt{t}\sin t}{1+t^2}\,dt$ converge donc absolument.

2) $g : t \longmapsto \dfrac{\sin t}{\sqrt{t}}$ est continue donc localement intégrable sur $]0,+\infty[$. Comme $\sin t \underset{t\to 0}{\sim} t$, on a $g(t) \underset{t\to 0}{\sim} \sqrt{t}$ et donc $\lim\limits_{t\to 0} g(t) = 0$. g est donc prolongeable par continuité en 0 et en particulier $\displaystyle\int_0 g$ converge.
Soit $X > 1$. $t \mapsto -\cos t$ et $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ sont de classe C^1 sur $[1, X]$ donc (théorème d'intégration par parties), $\displaystyle\int_1^X g = \left[\dfrac{-\cos t}{\sqrt{t}}\right]_1^X - \dfrac{1}{2}\int_1^X \dfrac{\cos t}{t^{\frac{3}{2}}}\,dt$. Or, $\left|\dfrac{-\cos t}{t^{\frac{3}{2}}}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$ et $\displaystyle\int^{+\infty} \dfrac{dt}{t^{\frac{3}{2}}}$ converge (intégrale de Riemann) donc $\displaystyle\int^{+\infty} \dfrac{\cos t}{t^{\frac{3}{2}}}\,dt$ converge (absolument).
D'autre part $\left|\dfrac{-\cos X}{\sqrt{X}}\right| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{X}} \xrightarrow[X\to+\infty]{} 0$ donc finalement $\displaystyle\int_1^X g$ a une limite finie lorsque X tend vers $+\infty$. Cela prouve que $\displaystyle\int^{+\infty} g$ converge et donc finalement que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g$ converge.

Exercice n°3 (*3 points*)

1) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Alors $X = nx^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Or, $\lim\limits_{X\to+\infty} Xe^{-X} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.
Comme d'autre part $f_n(0) = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, on peut finalement affirmer que la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

2) Soit $a > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $g_n = f_n - f$. g_n est dérivable sur $[a, +\infty[$ et on a, pour tout réel x de $[a, +\infty[$, $g_n'(x) = [2nx - 2nx(nx^2+1)]e^{-nx^2} = -2n^2x^3e^{-nx^2} < 0$. g_n est donc décroissante (et positive) sur $[a, +\infty[$. Par suite, $\underset{x \in [a,+\infty[}{\text{Sup}} |g_n(x)| = g_n(a) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et il y a convergence uniforme sur $[a, +\infty[$.

3) Les fonctions f_n sont toutes continues sur $\mathbb{R}$ et la limite f des f_n n'est pas continue en 0. La convergence ne saurait donc être uniforme sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°4}}$ (*5 points*)

1) On peut par exemple supposer les boules numérotées de 1 à 3 pour les rouges et de 4 à 10 pour les vertes. Un résultat possible peut alors être vu comme un numéro entre 1 et 10 et, les boules étant indiscernables au toucher, on peut munir l'ensemble Ω de ces dix numéros de la probabilité uniforme.
L'événement « Obtenir une boule rouge » est alors $R = \{1, 2, 3\}$ donc $\mathbb{P}(R) = \dfrac{\text{Card}(R)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{3}{10}$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En répétant n fois de manière indépendante (la boule tirée est remise) l'épreuve de Bernoulli précédente, la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues (succès) suit la loi binomiale de paramètres n et $0,3$. On a donc $\mathbb{E}(N) = 0,3n$ et $\sigma^2(N) = 0,3n.0,7 = 0,21n$. On cherche n en sorte que $\mathbb{P}\left(\left[0,29 \leqslant \dfrac{N}{n} \leqslant 0,31\right]\right) \geqslant 0,98$. Or, $\left[0,29 \leqslant \dfrac{N}{n} \leqslant 0,31\right] = [-0,01n \leqslant N - \mathbb{E}(N) \leqslant 0,01n]$ soit $\left[0,29 \leqslant \dfrac{N}{n} \leqslant 0,31\right] = \left[-\dfrac{0,1\sqrt{n}}{\sqrt{21}} \leqslant \dfrac{N-\mathbb{E}(N)}{\sigma(N)} \leqslant \dfrac{0,1\sqrt{n}}{\sqrt{21}}\right]$. Le théorème de De Moivre-Laplace permet d'approximer la loi de $\dfrac{N-\mathbb{E}(N)}{\sigma(N)}$ par la loi normale centrée réduite et donc $\mathbb{P}\left(\left[0,29 \leqslant \dfrac{N}{n} \leqslant 0,31\right]\right)$ par $2\Phi\left(\dfrac{0,1\sqrt{n}}{\sqrt{21}}\right) - 1$ où Φ est la fonction de répartition de cette même loi. On cherche donc n en sorte que $2\Phi\left(\dfrac{0,1\sqrt{n}}{\sqrt{21}}\right) - 1 \geqslant 0,98$ soit $\Phi\left(\dfrac{0,1\sqrt{n}}{\sqrt{21}}\right) \geqslant 0,99$. La table de la loi normale centrée réduite conduit alors à $\dfrac{0,1\sqrt{n}}{\sqrt{21}} \geqslant 2,33$ soit $\sqrt{n} \geqslant 23,3\sqrt{21}$ ou encore $n \geqslant 23,3^2.21 = 11\,400,69$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°5}}$ (*5 points*)

1) Notons F_Z la fonction de répartition de Z. Soit $x \in \mathbb{R}$. $[Z \leqslant x] = \overline{[Z > x]} = \overline{[X > x] \cap [Y > x]}$ donc :

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= 1 - \mathbb{P}([X > x] \cap [Y > x]) \\ &= 1 - \mathbb{P}([X > x])\,\mathbb{P}([Y > x]) && \text{car les variables aléatoires } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\ &= 1 - (1 - \mathbb{P}([X \leqslant x]))(1 - \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \\ &= 1 - \left(1 - \int_{-\infty}^{x} f\right)\left(1 - \int_{-\infty}^{x} f\right) && \text{puisque } f \text{ est la densité de } X \text{ et de } Y \end{aligned}$$

On en déduit $F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1-x)^2 = 2x - x^2 & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

2) F_Z est clairement continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$. Z est donc une variable aléatoire à densité. Une densité f_Z de Z est alors une fonction positive telle que $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, $f_Z(x) = F_Z'(x)$. On choisit $f_Z : x \longmapsto 2(1-x)\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$.

3) Il est clair que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} x f_Z(x)\,dx$ converge absolument donc Z admet une espérance.
On a alors $\mathbb{E}(Z) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} x f_Z(x)\,dx = \int_0^1 (2x - 2x^2)dx$ soit $\mathbb{E}(Z) = \left[x^2 - 2\dfrac{x^3}{3}\right]_0^1 = \dfrac{1}{3}$.