PRA2 - Probabilités - Analyse - Statistiques : Corrigé rapide du contrôle continu

Exercice n°1 *(3,5 points)*

1) On a $|u_n| \leqslant \dfrac{2}{n\sqrt{n}}$. Comme $\sum \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge (série de Riemann avec $\frac{3}{2} > 1$), la série $\sum u_n$ converge absolument (théorème de comparaison pour les séries positives) et donc aussi simplement.

2) On a $\ell n\,(1+X) \underset{X\to 0}{\sim} X$ donc $v_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ et $|v_n| \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n+1}$. $\sum v_n$ ne converge donc pas absolument (théorème d'équivalence pour les séries positives).
Le développement limité en 0 de $X \mapsto \ell n\,(1+X)$ à l'ordre 2 est : $\ell n\,(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + X^2\varepsilon(X)$ avec $\lim\limits_{X\to 0} \varepsilon(X) = 0$ donc :

$$v_n = \frac{(-1)^n}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\varepsilon(n) \qquad \text{avec } \lim_{n\to\infty} \varepsilon(n) = 0$$

- $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ converge d'après le critère spécial aux séries alternées (c'est une série alternée et la suite $\left(\left|\dfrac{(-1)^n}{n+1}\right| = \dfrac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers 0)
- $-\dfrac{1}{2(n+1)^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2}\varepsilon(n) \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{-1}{2n^2}$ donc $\sum \left(-\dfrac{1}{2(n+1)^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2}\varepsilon(n)\right)$ converge

La série $\sum v_n$ converge donc comme somme de deux séries convergentes.

Exercice n°2 *(3,5 points)*

1) $f : t \longmapsto \dfrac{\sin(2t)}{e^t - 1}$ est continue donc localement intégrable sur $]0, +\infty[$.
On a $e^t - 1 \underset{t\to 0}{\sim} t$ et $\sin(2t) \underset{t\to 0}{\sim} 2t$ donc $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} 2$ et f est prolongeable par continuité en 0 : $\displaystyle\int_0 f$ converge.
D'autre part $t^2\,|f(t)| \leqslant \dfrac{t^2}{e^t - 1} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ (par croissances comparées) donc $\displaystyle\int^{+\infty} f$ converge absolument (règle de comparaison aux intégrales de Riemann). L'intégrale proposée converge donc.

2) $g : t \longmapsto \dfrac{t\cos t}{3+t^2}$ est continue donc localement intégrable sur $[0, +\infty[$.
Soit $X > 0$. $t \mapsto \sin t$ et $t \mapsto \dfrac{t}{3+t^2}$ sont de classe C^1 sur $[0, X]$ donc (théorème d'intégration par parties), $\displaystyle\int_0^X g = \left[\frac{t\sin t}{3+t^2}\right]_0^X - \int_0^X \frac{3-t^2}{(3+t^2)^2}\sin t\,dt$. Or, $\left|\dfrac{3-t^2}{(3+t^2)^2}\sin t\right| \leqslant \dfrac{1}{3+t^2} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ et $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge (intégrale de Riemann) donc $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{3-t^2}{(3+t^2)^2}\sin t\,dt$ converge (absolument).
D'autre part $\left|\dfrac{X\sin X}{3+X^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{X} \xrightarrow[X\to+\infty]{} 0$ donc finalement $\displaystyle\int_0^X g$ a une limite finie lorsque X tend vers $+\infty$.
Cela prouve que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g$ converge.

Exercice n°3 *(3 points)*

1) Pour $x \neq 0$, on a $|f_n(x) - x| = |1 - \cos(nx)|\,e^{-nx} \leqslant 2e^{-nx} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Comme d'autre part $f_n(0) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on peut finalement affirmer que la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction $f : x \longmapsto x$.

2) Soit $a > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $g_n = f_n - f$. Pour tout réel x de $[a, +\infty[$ on a $|g_n(x)| \leqslant 2e^{-nx} \leqslant 2e^{-na}$ donc $\underset{x\in[a,+\infty[}{\text{Sup}} |g_n(x)| \leqslant 2e^{-na} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et il y a donc convergence uniforme sur $[a, +\infty[$.

3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $g_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = (1-\cos 1)e^{-1}$ donc $\underset{x\in]0,+\infty[}{\text{Sup}} |g_n(x)| \geqslant (1-\cos 1)e^{-1}$ et a fortiori $\underset{x\in]0,+\infty[}{\text{Sup}} |f_n(x) - f(x)|$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini : la convergence n'est pas uniforme sur $]0,+\infty[$.

Exercice n°4 (*3 points*)

1) L'ensemble Ω des tirages peut être vu comme l'ensemble des parties à deux éléments de l'ensemble des quatre boules identifiées à leur numéro. Le tirage ayant lieu au hasard et les boules étant indiscernables au toucher, on peut munir Ω de la probabilité uniforme. Il y a donc six (puisque $\binom{2}{4} = 6$) évènements élémentaires $\{\{1,2\}\}, \{\{1,3\}\}, \{\{1,4\}\}, \{\{2,3\}\}, \{\{2,4\}\}, \{\{3,4\}\}$, tous de probabilité $\dfrac{1}{6}$.

2) On a $X(\Omega) = \{1,2,3\}$ et $Y(\Omega) = \{2,3,4\}$.

La loi conjointe de X et Y est alors donnée par le tableau des $\mathbb{P}(X = k, Y = \ell)$:

$k\backslash\ell$	2	3	4	$\mathbb{P}([X=k])$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
2	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
3	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$\mathbb{P}([Y=\ell])$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sum = 1$

puisque, pour $(k,\ell) \in X(\omega) \times Y(\Omega)$, $[X = k, Y = \ell] = \begin{cases} \{\{k,\ell\}\} & \text{si } k < \ell \\ \emptyset & \text{si } k \geqslant \ell \end{cases}$

La dernière colonne (resp. ligne), obtenue par sommation des trois précédentes, donne alors la loi de X (resp. Y). On a en effet par exemple :

$$\begin{aligned} [X=1] &= [X=1] \cap \Omega \\ &= [X=1] \cap \bigcup_{\ell \in Y(\Omega)} [Y=\ell] \\ &= \bigcup_{\ell=2}^{4} [X=1] \cap [Y=\ell] \end{aligned}$$

donc (réunion disjointe) $\mathbb{P}([X=1]) = \displaystyle\sum_{\ell=2}^{4} \mathbb{P}(X=1, Y=\ell)$.

Les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes puisque par exemple

$$\mathbb{P}(X=3, Y=2) = 0 \neq \mathbb{P}(X=3).\,\mathbb{P}(Y=2)$$

Exercice n°5 (*3 points*)

1) Notons F_M la fonction de répartition de M. Soit $x \in \mathbb{R}$. $[M \leqslant x] = [X \leqslant x] \cap [Y \leqslant x]$ donc :

$$\begin{aligned} F_M(x) &= \mathbb{P}([X \leqslant x] \cap [Y \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([X \leqslant x])\,\mathbb{P}([Y \leqslant x]) && \text{car les variables aléatoires } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\ &= \int_{-\infty}^{x} f \,.\, \int_{-\infty}^{x} f && \text{puisque } f \text{ est la densité de } X \text{ et de } Y \end{aligned}$$

On en déduit $F_M(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

2) F_M est clairement continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$. M est donc une variable aléatoire à densité. Une densité f_M de M est alors une fonction positive telle que $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, $f(x) = F'_M(x)$. On choisit $f_M : x \longmapsto 2x\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$.

3) Il est clair que $\int_{\mathbb{R}} x f_M(x)\,dx$ converge absolument donc M admet une espérance.

On a alors $\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_M(x)\,dx = \int_0^1 2x^2 dx$ soit $\mathbb{E}(M) = \frac{2}{3}$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°6}}$ *(4 points)*

1. Les variables X_i sont indépendantes et de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec $p = 3$ %. Elles sont par conséquent dans L^2. On peut donc appliquer le théorème central limite.
   Par ailleurs, $\mathbb{E}[X_1] = 0.03$ et $Var(X_1) = 0.03 \times 0.97 = (0.171)^2$. En notant $\overline{X}_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$ la fréquence empirique, on a donc
   $$\frac{\sqrt{n}}{0.171}\left(\overline{X}_n - 0.03\right) \overset{\text{en loi}}{\longrightarrow} Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$
   On sait que $\mathbb{P}(|Z| \leqslant 1,96) = 0.95$. Par conséquent,
   $$\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{0.171}\left|\overline{X}_n - 0.03\right| \leqslant 1.96\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.95$$
   En posant, $I_n = \left[0.03 - 1.96 \times \frac{0.171}{\sqrt{n}}, 0.03 + 1.96 \times \frac{0.171}{\sqrt{n}}\right]$, pour n assez grand, on a $\mathbb{P}(\overline{X}_n \in I_n) \simeq 0.95$.
2. On remarque que $1.96 \times 0.171 = 0.33 \leqslant 1$.
   Par conséquent $I_n \subset J_n$, et donc $\mathbb{P}(\overline{X}_n \in J_n) \geqslant \mathbb{P}(\overline{X}_n \in I_n) \simeq 0.95$ pour n assez grand.
3. Une réalisation de $\overline{X}_n$ donne la valeur $\frac{23}{350} \simeq 6.57$ %. L'intervalle de fluctuation pour $n = 350$ est $I_n = [0.012, 0.048]$. Comme 6.57 % n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation, au niveau de risque 5 %, on peut en conclure que les machines de fabrication de l'entreprise ne sont probablement plus assez bien réglées.
4. (a) Par parité de la densité gaussienne, $\mathbb{P}(|Z| < a) = 2\mathbb{P}(Z < a) - 1$. Donc, $\mathbb{P}(|Z| < a) = 0,97$ si $\mathbb{P}(Z < a) = 0.985$. D'après la table de la loi gaussienne, on en déduit $a \simeq 2.17$.

   (b) D'après le théorème central limite
   $$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\left(\overline{X}_n - p\right) \overset{\text{en loi}}{\longrightarrow} Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$
   Par ailleurs d'après la loi des grands nombres, $\overline{X}_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} p$ en probabilité. Donc pour n assez grand,
   $$\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}}\left|\overline{X}_n - p\right| < 2.17\right) \simeq 0.97.$$
   L'intervalle $K_n = \left[\overline{X}_n - 2.17\sqrt{\frac{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}{n}}, \overline{X}_n + 2.17\sqrt{\frac{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}{n}}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique de niveau 97 %.

   (c) Une réalisation de K_n donne une évaluation de p dans $[0.01, 0.041]$ fiable à 97 %.