UNIVERSITÉ DE RENNES 1

PRA2 : Probabilités - Analyse - Statistiques

Contrôle continu du lundi 23 mars 2015
Durée : 2h

Les six exercices sont indépendants - Le barème est donné à titre indicatif
La qualité de la rédaction interviendra pour une large part dans l'appréciation de la copie

Exercice n°1 *(3,5 points)*
Étudier la convergence simple et la convergence absolue de la série numérique dont le terme général est :

1) $u_n = \dfrac{(-1)^n - \sin n}{n\sqrt{n} + 2}$ **2)** $v_n = \ell n \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n+1}\right)$

Exercice n°2 *(3,5 points)*
Étudier la convergence de chacune des intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{e^t - 1}\, dt$ **2)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\cos t}{3 + t^2}\, dt$

Exercice n°3 *(3 points)*
Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x \in [0, +\infty[\qquad f_n(x) = x + (1 - \cos(nx))\,\mathrm{e}^{-nx}$$

1) Donner le domaine de convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2) Soit $a > 0$. Montrer que la convergence de cette suite est uniforme sur l'intervalle $[a, +\infty[$.

3) La convergence est-elle uniforme sur $]0, +\infty[$?

Exercice n°4 *(3 points)*
Une urne contient quatre boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à 4. On tire au hasard et simultanément deux de ces boules et on observe les numéros obtenus.

1) Modéliser l'expérience et décrire les évènements élémentaires.

2) On note X (respectivement Y) la variable aléatoire égale au plus petit (respectivement plus grand) des numéros obtenus. Déterminer la loi conjointe ainsi que les lois marginales de X et Y.
Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

T.S.V.P.

$\boxed{\textbf{Exercice n°5}}$ *(3 points)*

On considère deux variables aléatoires réelles X et Y indépendantes, toutes deux de loi uniforme sur $[0,1]$ (c'est à dire de densité $f = \mathbb{1}_{[0,1]}$). On pose $M = \max(X, Y)$

1) Expliciter la fonction de répartition de la variable aléatoire M.

2) En déduire que M admet une densité.

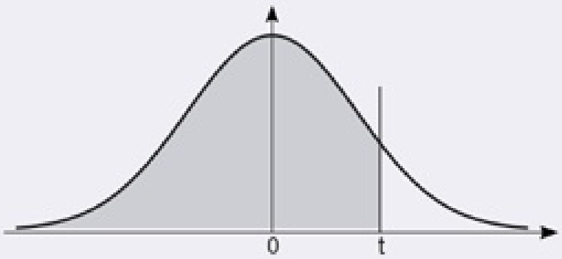
3) Calculer l'espérance de M.

$\boxed{\textbf{Exercice n°6}}$ *(4 points)*

Une entreprise de fabrication de pièces métalliques a calibré ses machines afin que la proportion de pièces défectueuses soit de l'ordre de 3 %. Après quelques années de fonctionnement, l'entreprise souhaite vérifier que ses machines sont toujours bien réglées. Pour cela, elle extrait un échantillon $X_1, \ldots, X_n$ de taille n de sa production, où chaque variable prend la valeur 1 si la pièce considérée est défectueuse et 0 sinon.

1. En justifiant votre résultat par les théorèmes classiques du cours, déterminer un intervalle de fluctuation I_n de niveau à 95 % de la fréquence de pièces défectueuses dans l'échantillon.
2. Expliquer pourquoi l'intervalle $J_n = [0.03 - \frac{1}{\sqrt{n}}, 0.03 + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ est un intervalle de fluctuation de niveau de confiance supérieur à 95 %.
3. Sur un échantillon de taille 350, l'entreprise dénombre 23 pièces défectueuses. Que peut conclure l'entreprise ?
4. Après un renouvellement de ses machines de fabrication, l'entreprise souhaite évaluer la nouvelle proportion p de pièces défectueuses.
   (a) Soit Z une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$. En justifiant votre calcul, trouver la valeur de a telle que $\mathbb{P}(|Z| < a) = 0,97$.
   (b) On considère un échantillon de pièces $X_1, \ldots, X_n$. Donner un intervalle de confiance de p de niveau de confiance 97 %.
   (c) Sur un échantillon de 500 pièces, l'entreprise constate qu'il y a 13 pièces défectueuses. Que peut-on en déduire ?

Table donnant P(Z<t) pour une variable aléatoire suivant N(0,1)



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Table pour les grandes valeurs

t	3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4	4,5
$\phi(t)$	0,9987	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	0,999928	0,999968	0,999997